

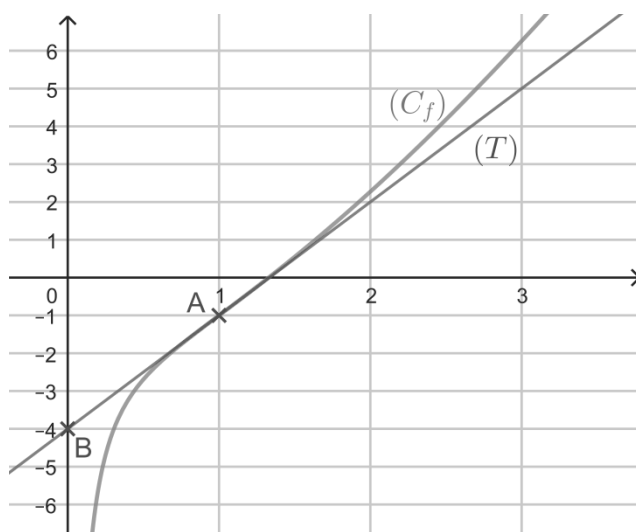
Exercice 3 (5 points)

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(x^2) - \frac{1}{x}$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative (C_f) de la fonction f , ainsi que la droite (T) , tangente à la courbe (C_f) au point A de coordonnées $(1; -1)$. Cette tangente passe également par le point $B(0; -4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T) .
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.
Que semble représenter le point A pour la courbe (C_f) ?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - a. Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$,
3.
 - a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b. Étudier les variations de la fonction f' , puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.
En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4.
 - a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b. Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$$