

EXERCICE 3 (5 points)

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 mL d'un médicament.

On introduit la suite (u_n) telle que le terme u_n représente la quantité de médicament, exprimée en mL, présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament.

On a $u_1 = 2$ et pour tout entier naturel n strictement positif : $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$.

Partie A

En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.

1. Calculer la valeur u_2 .
2. Montrer, par récurrence sur n , que $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$ pour tout entier naturel n strictement positif.
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Soit N un entier naturel strictement positif, l'inéquation $u_N \geq 10$ admet-elle des solutions ? Interpréter le résultat de cette question dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL. Justifier votre démarche.

Partie B

En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps.

On définit pour cela la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

On admet que la suite (S_n) est croissante.

1. Calculer S_2 .
2. Montrer que, pour tout entier naturel n strictement positif,

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0,8^n$$

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
4. On donne la fonction mystere suivante, écrite en langage Python.

```
1 def mystere(k):  
2     n=1  
3     s=2  
4     while s<k :  
5         n=n+1  
6         s=10-40/n+(40*0.8**n)/n  
7     return n
```

Dans le contexte de l'énoncé, que représente la valeur renvoyée par la saisie `mystere(9)` ?

5. Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.