

Exercice 3 (6 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] - 1; +\infty[$ par $f(x) = 4 \ln(x + 1) - \frac{x^2}{25}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $] - 1; +\infty[$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en -1 .
2. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $] - 1; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x + 1)}$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $] - 1; +\infty[$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2 ; 6,5]$.
4. On considère h la fonction définie sur l'intervalle $[2 ; 6,5]$ par $h(x) = f(x) - x$. On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction h :

x	2	$m \approx 2,364$	6,5
$h(x)$	$h(2)$	$M \approx 2,265$	$h(6,5)$

Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2; 6,5]$.

5. On considère le script suivant, écrit en langage Python :

```
from math import*

def f(x):
    return (4*log(1+x) - (x**2)/25)

def bornes(n):
    p = 1/10**n
    x = 6
    while f(x) - x > 0 :
        x = x+p
    return (x-p, x)
```

On rappelle qu'en langage Python :

- la commande `log(x)` renvoie la valeur $\ln x$;
- la commande `c**d` renvoie la valeur de c^d .

- a. Donner les valeurs renvoyées par la commande `bornes(2)`. On donnera les valeurs arrondies au centième.
- b. Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats obtenus dans la **partie A**.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6,5$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ .
3. On rappelle que le réel α , défini dans la **partie A**, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle $[2 ; 6,5]$.
Justifier que $\ell = \alpha$.

Exercice 4 (4 points)

Partie A

On considère l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0,48y = \frac{1}{250}$ où y est une fonction de la variable t définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $h(t) = \frac{1}{120}$.
Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1) .
2. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1) .

Partie B

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture. À un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de 30 000 bactéries dans le milieu. On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t , exprimé en heure. On a donc $p(0) = 30$.

On admet que la fonction p définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ est dérivable, strictement positive sur cet intervalle et qu'elle est solution de l'équation différentielle (E_2) :

$$p' = \frac{1}{250} p \times (120 - p)$$

Soit y la fonction strictement positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ telle que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a $p(t) = \frac{1}{y(t)}$.

1. Montrer que si p est solution de l'équation différentielle (E_2) , alors y est solution de l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0,48y = \frac{1}{250}$.