

Exercice 3 (6 points)

On considère n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n e^{1-x}.$$

On admet que la fonction f_n est dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$ et on note f'_n sa fonction dérivée.

Partie A

Dans cette partie on étudie le cas où $n = 1$.

On étudie donc la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_1(x) = x e^{1-x}.$$

1. Montrer que $f'_1(x)$ est strictement positif pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1[$.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0; 1]$.
3. En déduire que l'équation $f_1(x) = 0,1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0; 1]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

On admet que $u_1 = e - 2$.

1. a. Justifier que pour tout $x \in [0; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n.$$

- b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

- c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

2. a. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

- b. On considère le script Python ci-dessous définissant la fonction `suite()`.

```
from math import exp

def suite() :
    u= ...
    for n in range (1,...):
        u= ...
    return
```

Recopier et compléter le script Python ci-dessus pour que la fonction `suite()` renvoie la valeur de $\int_0^1 x^8 e^{1-x} dx$.

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

- b. En déduire la limite de la suite (u_n) .