

Exercice 3. (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2 + \ln(u_n^2 - 3).$$

On admet que cette suite est bien définie.

Partie A : Exploitation de programmes Python

1. Recopier et compléter le script Python ci-dessous pour que `suite(k)` qui prend en paramètre un entier naturel k , renvoie la liste des k premières valeurs de la suite (u_n) .

Remarque : On précise que, pour tout réel strictement positif a , $\log(a)$ renvoie la valeur du logarithme népérien de a .

```
def suite(k):  
    L = []  
    u = 5  
    for i in range(.....):  
        L.append(u)  
        u= .....  
    return(.....)
```

2. On a exécuté `suite(9)` ci-dessous. Émettre deux conjectures : l'une sur le sens de variation de la suite (u_n) et l'autre sur son éventuelle convergence.

```
>>> suite(9)  
[5, 5.091042453358316, 5.131953749864703,  
 5.150037910978289, 5.157974010229213, 5.1614456706362954,  
 5.162962248594583, 5.163624356938671, 5.163913344065642]
```

3. On a ensuite créé la fonction `mystere(n)` donnée ci-dessous et exécuté `mystere(10000)` ce qui a renvoyé 1.
Cet affichage contredit-il la conjecture émise sur le sens de variation de la suite (u_n) ? Justifier.

```
def mystere(n):  
    L = suite(n)  
    c = 1  
    for i in range(n - 1):  
        if L[i] > L[i + 1]:  
            c = 0  
    return c
```

```
>>> mystere(10000)  
1
```

Partie B : Étude de la convergence de la suite (u_n)

On considère la fonction g définie sur $[2 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2 + \ln(x^2 - 3)$$

On admet que g est dérivable sur $[2 ; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction g est croissante sur $[2 ; +\infty[$.
2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
$$4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie C : Étude de la valeur de la limite

On considère la fonction f définie sur $[2 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2 + \ln(x^2 - 3) - x.$$

On admet que f est dérivable sur $[2 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

On donne le tableau de variations de f suivant. On ne demande aucune justification.

x	2	3	$+\infty$
$f(x)$	0	$\ln(6) - 1$	$-\infty$

1. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[2 ; +\infty[$ que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$.
b. Donner la valeur exacte de α et une valeur approchée à 10^{-3} près de β .
2. On note ℓ la limite de la suite (u_n) .
Justifier que $f(\ell) = 0$ et déterminer ℓ .