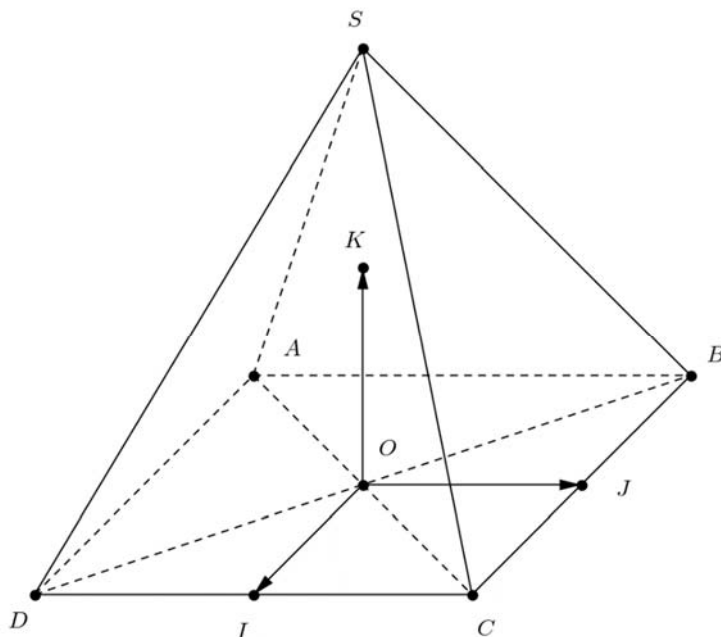


EXERCICE 3 (5 points)

Dans cet exercice l'unité est le cm.

On considère une pyramide à base carrée $SABCD$ comme dans la figure ci-dessous.



Dans cette figure :

- $AB = BC = CD = DA = OS = 2$ cm
- I est le milieu de $[CD]$, J le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[OS]$.

L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$.

On admet que $B(-1; 1; 0)$, $C(1; 1; 0)$, et $S(0; 0; 2)$.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Donner les coordonnées des points A et D .
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB}$.
3. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BSC}$ arrondie au dixième de degré près.

Partie B

On se propose dans cette partie de déterminer la distance du point O au plan (SBC) .

1. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - a. Justifier que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (SBC) .
 - b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (SBC) est $2y + z - 2 = 0$.

2. On note H le projeté orthogonal du point O sur le plan (SBC) .

a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (OH) est

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 2t \\ z &= t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

b. Calculer les coordonnées du point H .

c. En déduire que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.

Partie C

On se propose ici de retrouver le résultat de la **partie B** par une autre méthode.

1. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$

a. Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.

b. En déduire que le volume de la pyramide $OCBS$ est égal à $\frac{2}{3}$ cm³.

2. Déterminer l'aire du triangle SBC .

3. Déduire des questions précédentes que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.