

Exercice 3, commun à tous les candidats (sur 6 points)

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x - e^{-2x}$.

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbf{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbf{R}$, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. Dédire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie II

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$g(x) = e^{-x}.$$

Les courbes $\mathcal{C}$ et Γ (qui représente la fonction f de la **Partie I**) sont tracées **sur le graphique donné en annexe qui est à compléter et à rendre avec la copie**.

Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe $\mathcal{C}$ le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.

1. Pour tout nombre réel t , on note M le point de coordonnées $(t; e^{-t})$ de la courbe $\mathcal{C}$.

On considère la fonction h qui, au nombre réel t , associe la distance OM .

On a donc : $h(t) = OM$, c'est-à-dire :

$$h(t) = \sqrt{t^2 + e^{-2t}}.$$

- a. Montrer que, pour tout nombre réel t ,

$$h'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}}.$$

où f désigne la fonction étudiée dans la **Partie I**.

- b. Démontrer que le point A de coordonnées $(\alpha; e^{-\alpha})$ est le point de la courbe $\mathcal{C}$ pour lequel la longueur OM est minimale. Placer ce point sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.

2. On appelle T la tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$.

- a. Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente T .

On rappelle que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $\frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$.

On rappelle également le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration :

Dans un repère orthonormé du plan, deux droites D et D' de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si, et seulement si le produit mm' est égal à -1 .

- b. Démontrer que la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires. Tracer ces droites sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.

Exercice 3

