

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en justifiant votre démarche.
2. a. Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
 b. En déduire le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$.
3. On admet que, pour tout $x > 0$, la dérivée seconde de f , notée f'' , est définie par $f''(x) = \frac{2-x}{x^2}$. Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de C_f .

EXERCICE 3 (7 points) [Suites]

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.

Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.

Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.

On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année 2020+ n .

On admet que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2000$.

1. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 100.$$

2. Calculer u_1 , puis u_2 .
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $1000 < u_{n+1} \leq u_n$.
4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.
5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1000$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1000(1 + 0,9^n)$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (u_n) . En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.
6. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec $S > 1000$).
 - a. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leq 1020$.
 Justifier la réponse par un calcul.

- b. Dans le programme Python ci-contre, la variable n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, la variable u désigne l'effectif de la population. Recopier et compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil S .

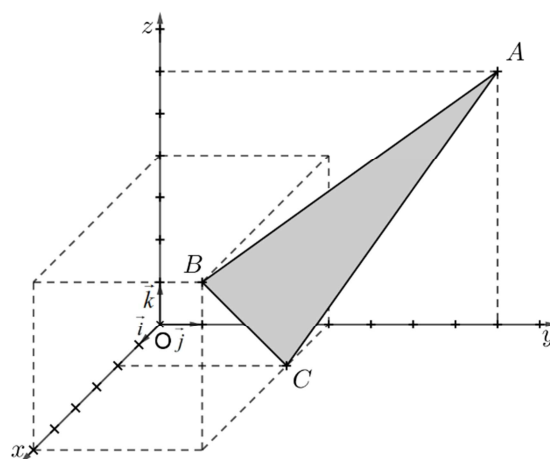
```

1 def population(s):
2     n=0
3     u=2000
4
5     while .....:
6         u=...
7         n=...
8     return ...

```

EXERCICE 4 (7 points) [Géométrie dans l'espace]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0; 8; 6)$, $B(6; 4; 4)$ et $C(2; 4; 0)$.



1.
 - a. Justifier que les points A , B et C ne sont pas alignés.
 - b. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1; 2; -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
 - c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
2. Soient D et E les points de coordonnées respectives $(0; 0; 6)$ et $(6; 6; 0)$.
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DE) .
 - b. Montrer que le milieu I du segment $[BC]$ appartient à la droite (DE) .
3. On considère le triangle ABC .
 - a. Déterminer la nature du triangle ABC .
 - b. Calculer l'aire du triangle ABC en unité d'aire.
 - c. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
 - d. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie à 0,1 degré.
4. On considère le point H de coordonnées $\left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.
 Montrer que H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC) .
 En déduire la distance du point O au plan (ABC) .