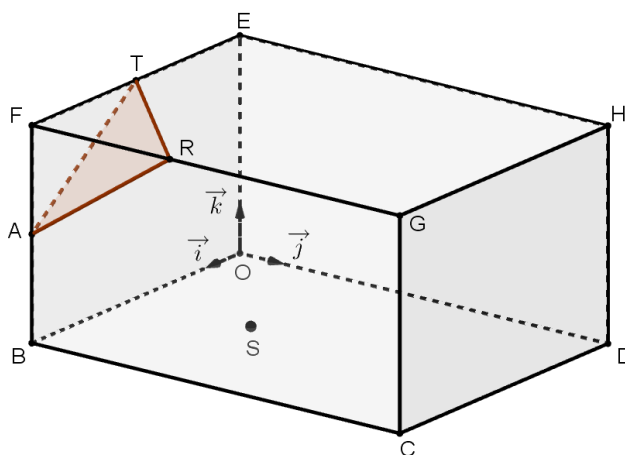


Exercice 3 (7 points)

Thème : géométrie dans l'espace

Une exposition d'art contemporain a lieu dans une salle en forme de pavé droit de largeur 6 m, de longueur 8 m et de hauteur 4 m. Elle est représentée par le parallélépipède rectangle OBCDEFGH où $OB = 6$ m, $OD = 8$ m et $OE = 4$ m.

On utilise le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OB}$, $\vec{j} = \frac{1}{8}\overrightarrow{OD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OE}$.



Dans ce repère, on a, en particulier : $C(6, 8, 0)$, $F(6, 0, 4)$ et $G(6, 8, 4)$.

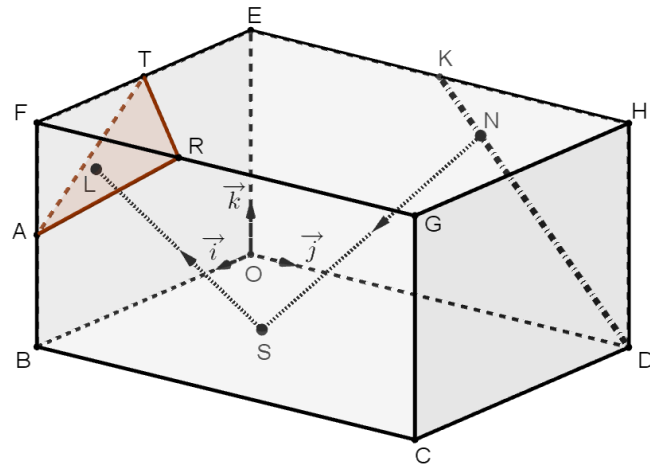
Une des œuvres exposées est un triangle de verre représenté par le triangle ART qui a pour sommets $A(6, 0, 2)$, $R(6, 3, 4)$ et $T(3, 0, 4)$. Enfin, S est le point de coordonnées $\left(3, \frac{5}{2}, 0\right)$.

1.
 - a. Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.
 - b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT}$.
 - c. En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{RAT}$.
2.
 - a. Justifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ART).
 - b. En déduire une équation cartésienne du plan (ART).
3. Un rayon laser dirigé vers le triangle ART est émis du plancher à partir du point S. On admet que ce rayon est orthogonal au plan (ART).
 - a. Soit Δ la droite orthogonale au plan (ART) et passant par le point S.
Justifier que le système ci-dessous est une représentation paramétrique de la droite Δ :

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \frac{5}{2} - 2k \\ z = 3k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbf{R}.$$

- b. Soit L le point d'intersection de la droite Δ avec le plan (ART). Démontrer que L a pour coordonnées $\left(5, \frac{1}{2}, 3\right)$.

4. L'artiste installe un rail représenté par le segment $[DK]$ où K est le milieu du segment $[EH]$. Sur ce rail, il positionne une source lumineuse laser en un point N du segment $[DK]$ et il oriente ce second rayon laser vers le point S .



- Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 1]$, le point N de coordonnées $(0, 8 - 4t, 4t)$ est un point du segment $[DK]$.
- Calculer les coordonnées exactes du point N tel que les deux rayons laser représentés par les segments $[SL]$ et $[SN]$ soient perpendiculaires.