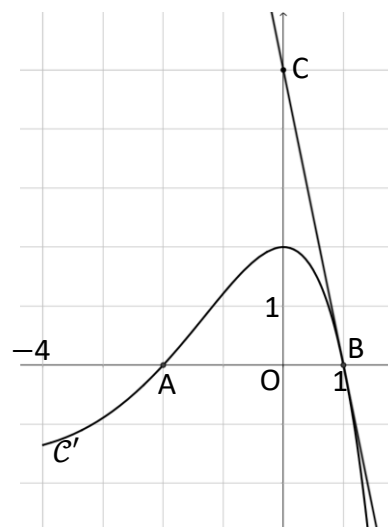


Pour les questions 4. et 5., on considère une fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4; 2]$. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la dérivée seconde de f .

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}'$ de la fonction dérivée f' dans un repère du plan. On donne de plus les points $A(-2; 0)$, $B(1; 0)$ et $C(0; 5)$.



4. La fonction f est :

- a. concave sur $[-2; 1]$; b. convexe sur $[-4; 0]$;
c. convexe sur $[-2; 1]$; d. convexe sur $[0; 2]$.

5. On admet que la droite (BC) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}'$ au point B.

On a :

- a. $f'(1) < 0$; b. $f'(1) = 5$;
c. $f''(1) > 0$; d. $f''(1) = -5$.

6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 1)e^x$.

La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 1$ est définie par :

- a. $F(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x$; b. $F(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x - 2$;
c. $F(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)e^x + 1$; d. $F(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)e^x$.

Exercice 3 (7 points)

Thèmes : fonction logarithme, suites

Les parties B et C sont indépendantes.

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - x \ln x$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

- Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
- Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
- On admet que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = -\ln x$.
 - En déduire les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variation.
- Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n - u_n \ln u_n \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0,5; 1]$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

2. a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b. On note l la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de l .

Partie C

Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_k(x) = kx - x \ln x$$

1. Pour tout nombre réel k , montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = e^{k-1}$.

2. Vérifier que, pour tout nombre réel k , on a : $x_k = y_k$.

Exercice 4 (7 points)

Thème : géométrie dans l'espace

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(2; 4; 0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- la droite $\mathcal{D}'$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 + t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}'$ de la droite $\mathcal{D}'$.

b. Montrer que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

On admet dans la suite de cet exercice qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Cette droite Δ coupe chacune des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. On appellera M le point d'intersection de Δ et $\mathcal{D}$, et M' le point d'intersection de Δ et $\mathcal{D}'$.

On se propose de déterminer la distance MM' appelée « distance entre les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ».

2. Montrer que le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ .