

EXERCICE 3 (7 points)

Principaux domaines abordés :

Géométrie dans l'espace.

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'une pyramide EFGHS.

On a $DC = 6$, $DA = DH = 4$.

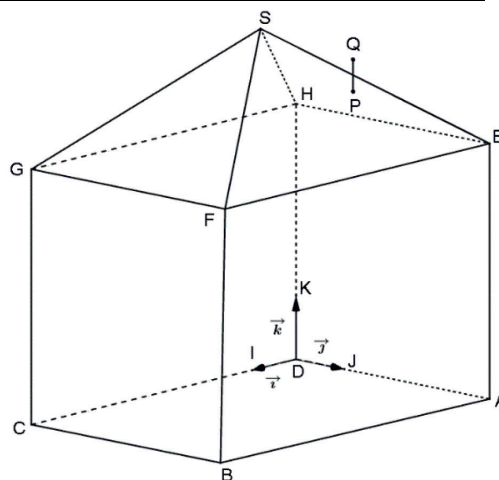
Soit les points I, J et K tels que

$$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}, \quad \overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}, \quad \overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DH}.$$

On note $\vec{i} = \overrightarrow{DI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{DJ}$, $\vec{k} = \overrightarrow{DK}$.

On se place dans le repère orthonormé $(D; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On admet que le point S a pour coordonnées $(3; 2; 6)$.



- Donner, sans justifier, les coordonnées des points B, E, F et G.
- Démontrer que le volume de la pyramide EFGHS représente le septième du volume total de la maison.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

- Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EFS).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EFS) est $y + z - 8 = 0$.

- On installe une antenne sur le toit, représentée par le segment [PQ].

On dispose des données suivantes :

- le point P appartient au plan (EFS) ;
- le point Q a pour coordonnées $(2; 3; 5,5)$;
- la droite (PQ) est dirigée par le vecteur $\vec{k}$.

a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (PQ) est :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5,5 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

b. En déduire les coordonnées du point P.

c. En déduire la longueur PQ de l'antenne.

Un oiseau vole en suivant une trajectoire modélisée par la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -4 + 6s \\ y = 7 - 4s \\ z = 2 + 4s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Déterminer la position relative des droites (PQ) et Δ .

L'oiseau va-t-il percuter l'antenne représentée par le segment [PQ] ?