

EXERCICE 3 (4 points)

Marie Skłodowska-Curie (1867-1934) est une physicienne (mais aussi chimiste et mathématicienne), polonaise naturalisée française. Deux Prix Nobel lui ont été décernés : un en Physique (partagé avec son mari et Henri Becquerel) en 1903 et un en Chimie en 1911 pour la découverte de deux nouveaux éléments, le polonium (nom donné en hommage à ses origines) et le radium.

On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.

Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium.

On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques.

On admet que, au bout de 24 heures, 0,5% des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005 g de polonium.

On modélise la situation à l'aide d'une suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience. Pour $n \geq 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

1. (a) Vérifier que $v_0 = 6 \times 10^{21}$
(b) Expliquer que, pour tout nombre entier naturel n , on a $v_{n+1} = 0,995v_n + 1,5 \times 10^{19}$.
2. (a) Démontrer, par récurrence sur n , que $0 \leq v_{n+1} \leq v_n$.
(b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est convergente.
3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie, pour tout entier naturel n , par : $u_n = v_n - 3 \times 10^{21}$.
(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est géométrique de raison 0,995.
(b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n = 3 \times 10^{21} (0,995^n + 1)$.
(c) En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Déterminer, par le calcul, au bout de combien de jours le nombre de noyaux de polonium sera inférieur à $4,5 \times 10^{21}$. Justifier la réponse.
5. On souhaite disposer de la liste des termes de la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
Pour cela, on utilise une fonction appelée `noyaux` programmée en langage Python et retranscrite partiellement ci-après.

```
1 def noyaux(n):  
2     V=6*10**21  
3     L=[V]  
4     for k in range (n):  
5         V=.....  
6         L.append(V)  
7     return L
```

- (a) À la lecture des questions précédentes, proposer deux solutions différentes pour compléter la ligne 5 de la fonction `noyaux` afin qu'elle réponde au problème.
- (b) Pour quelle valeur de l'entier n la commande `noyaux(n)` renverra-t-elle les relevés quotidiens du nombre de noyaux contenus dans l'échantillon de polonium pendant 52 semaines d'étude ?