

Exercice 3 (5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- le plan $\mathcal{P}_1$ dont une équation cartésienne est $2x + y - z + 2 = 0$,
- le plan $\mathcal{P}_2$ passant par le point $B(1; 1; 2)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}_1$ normal au plan $\mathcal{P}_1$.
- b. On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un des plans est orthogonal à un vecteur normal à l'autre plan.
Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

2. a. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$.

- b. On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Montrer que la droite Δ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

On considère le point $A(1; 1; 1)$ et on admet que le point A n'appartient ni à $\mathcal{P}_1$ ni à $\mathcal{P}_2$.
On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ .

3. On rappelle que, d'après la question 2.b, la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0; -2 + t; t)$, où t désigne un nombre réel quelconque.

- a. Montrer que, pour tout réel t , $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.

- b. En déduire que $AH = \sqrt{3}$.

4. On note $\mathcal{D}_1$ la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$ passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}_1$.

- a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$.

- b. En déduire que le point H_1 a pour coordonnées $(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3})$.

5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}_2$.

On admet que H_2 a pour coordonnées $(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3})$
et que H a pour coordonnées $(0; 0; 2)$.

Sur le schéma ci-contre, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont représentés, ainsi que les points A, H_1, H_2, H .

Montrer que AH_1HH_2 est un rectangle.

