

1. Par lecture graphique, avec la précision que permet le tracé ci-dessus, donner :
 - a. le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 1.
 - b. le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
2. a. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 b. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Montrer que la courbe C coupe l'axe des abscisses en deux points exactement dont on précisera les coordonnées.
4. a. Montrer que pour tout réel x appartenant à $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x}$.
 b. En déduire, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
5. On note f'' la dérivée seconde de f et on admet que pour tout réel x appartenant à $]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{2(\ln x - 2)}{x^2}$.
 Déterminer par le calcul le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser les coordonnées du point d'inflexion de la courbe C .

Exercice 3 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{e} \\ \text{pour tout entier } n \geq 1, u_{n+1} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n \end{cases}$$

1. Calculer les valeurs exactes de u_2 et u_3 . On détaillera les calculs.
2. On considère une fonction écrite en langage Python qui, pour un entier naturel n donné, affiche le terme u_n . Compléter les lignes L_2 et L_4 de ce programme.

L_1	def suite(n) :
L_2	
L_3	for i in range (1, n) :
L_4	u = ...
L_5	return u

3. On admet que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $1 + \frac{1}{n} \leq e$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
 - c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier votre réponse.
4. a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul, on a : $u_n = \frac{n}{e^n}$.
 b. En déduire, si elle existe, la limite de la suite (u_n) .