

### **Exercice 3** (6 points)

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par  $g(x) = 2x - x^2$ .

1. Montrer que la fonction  $g$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; 1]$  et préciser les valeurs de  $g(0)$  et de  $g(1)$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$  pour tout entier naturel  $n$ .

2. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $0 < u_n < u_{n+1} < 1$ .
4. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
5. Déterminer la limite  $\ell$  de la suite  $(u_n)$ .

On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = \ln(1 - u_n)$ .

6. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.
7. En déduire une expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
8. En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  et retrouver la limite déterminée à la question 5.
9. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang  $n$  à partir duquel la suite dépasse 0,95.

```
def seuil() :  
    n=0  
    u=0.5  
    while u<0.95:  
        n=...  
        u=...  
    return n
```