

Partie B : étude de la suite (p_n) .

On souhaite estimer le déplacement du robot au bout d'un nombre important d'étapes.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}.$$

On pourra s'aider d'un arbre.

2.

- a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $p_n \leq p_{n+1} < \frac{2}{3}$.

b. La suite (p_n) est-elle convergente ? Justifier.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $u_n = p_n - \frac{2}{3}$.

a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

b. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Dans cette partie, on considère un autre robot qui réalise dix déplacements d'un mètre indépendants les uns des autres, chaque déplacement vers la droite ayant une probabilité fixe égale à $\frac{3}{4}$.

Quelle est la probabilité qu'il revienne à son point de départ au bout des dix déplacements ? On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

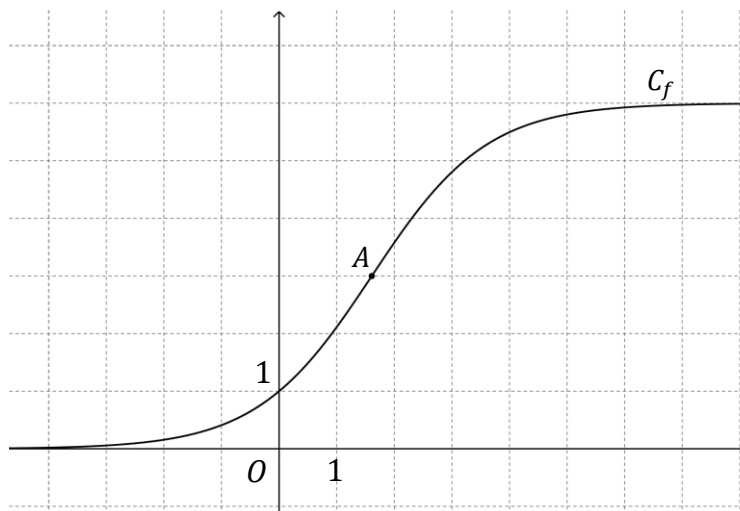
Exercice 3 (5 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{6}{1 + 5e^{-x}}.$$

On a représenté sur le schéma ci-dessous la courbe représentative C_f de la fonction f .



- Montrer que le point A de coordonnées $(\ln 5 ; 3)$ appartient à la courbe C_f .
- Montrer que la droite d'équation $y = 6$ est une asymptote à la courbe C_f .

3.

- a. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = \frac{30e^{-x}}{(1 + 5e^{-x})^2}.$$

- b. En déduire le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$.

4. On admet que :

- f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note f'' sa dérivée seconde ;
- pour tout réel x ,

$$f''(x) = \frac{30e^{-x}(5e^{-x} - 1)}{(1 + 5e^{-x})^3}.$$

- a. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. On montrera en particulier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion.

- b. Justifier que pour tout réel x appartenant à $] -\infty ; \ln 5]$, on a : $f(x) \geq \frac{5}{6}x + 1$.

5. On considère une fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = k \ln(e^x + 5)$, où k est une constante réelle.

- a. Déterminer la valeur du réel k de sorte que F_k soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- b. En déduire que l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 5$ est égale à $6 \ln\left(\frac{5}{3}\right)$.

Partie B

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' = y - \frac{1}{6}y^2.$$

On rappelle qu'une solution de l'équation (E) est une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel, on a :

$$u'(x) = u(x) - \frac{1}{6}u(x)^2.$$

1. Montrer que la fonction f définie dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$.
3. On désigne par g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas. On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{g(x)}$. On admet que h est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g' et h' les fonctions dérivées de g et h .
 - a. Montrer que si h est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$, alors g est solution de l'équation différentielle $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.
 - b. Pour tout réel positif m , on considère les fonctions g_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = \frac{6}{1 + 6me^{-x}}.$$

Montrer que pour tout réel positif m , la fonction g_m est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.