

Exercice 3. (6 points)

On considère la suite (u_n) , définie par :

$$u_0 = 8 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right).$$

1. a. Donner les valeurs arrondies au centième de u_1 et u_2 .
- b. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous en Python. On admet que, pour tout réel strictement positif a , $\log(a)$ renvoie la valeur du logarithme népérien de a .

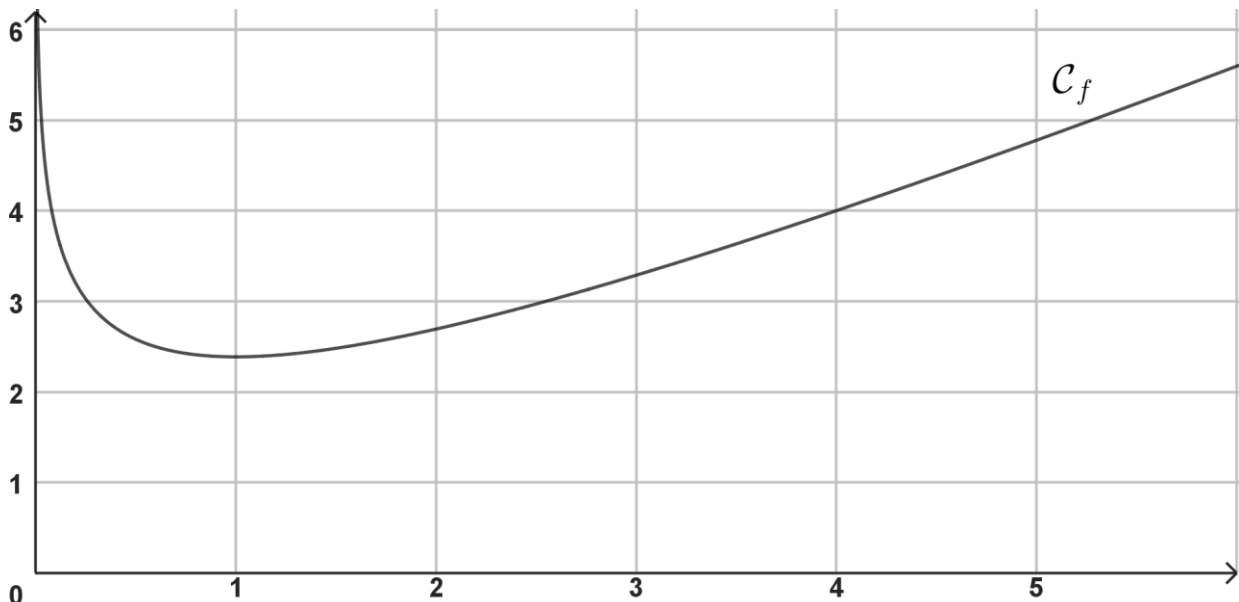
```
def mystere(k):  
    u = 8  
    S = 0  
    for i in range(k):  
        S = S + u  
        u = u - log(u / 4)  
    return S
```

L'exécution de `mystere(10)` renvoie 58.44045206721732. Que représente ce résultat ?

- c. Modifier la fonction précédente afin qu'elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite (u_n) .
-
2. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

On donne ci-dessous une représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f pour les valeurs de x comprises entre 0 et 6 :



Étudier les variations de f sur $]0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0 ; +\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.

Dans la suite de l'exercice, on remarquera que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle.

On note ℓ la valeur de cette limite.

c. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

d. En déduire la valeur de ℓ .