

Exercice 3 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- les points $A(4; 2; 2)$, $B(5; -2; 3)$ et $C(1; 1; 1)$;
- la droite Δ dont une représentation paramétrique est donnée par
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} ;$$
- le plan $\mathcal{P}$ passant par le point A et perpendiculaire à la droite Δ .

1. Vérifier que la droite Δ passe par le point $C(1; 1; 1)$ mais pas par le point A .
2.
 - a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $2x + y + 2z - 14 = 0$.
 - b. Vérifier que le plan $\mathcal{P}$ passe par le point B mais pas par le point C .
3. On considère le point $D(3; 2; 3)$.
 - a. Démontrer que le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathcal{P}$.
 - b. Justifier que les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires.
 - c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
 - d. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur relative à cette base.

4. On appelle H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) .
 - a. Vérifier que les coordonnées du point H sont $\left(\frac{73}{29}; \frac{-4}{29}; \frac{51}{29}\right)$.
 - b. Démontrer que l'aire du triangle ABC est $\frac{3\sqrt{22}}{2}$.
 - c. En déduire la distance du point D au plan (ABC) .