

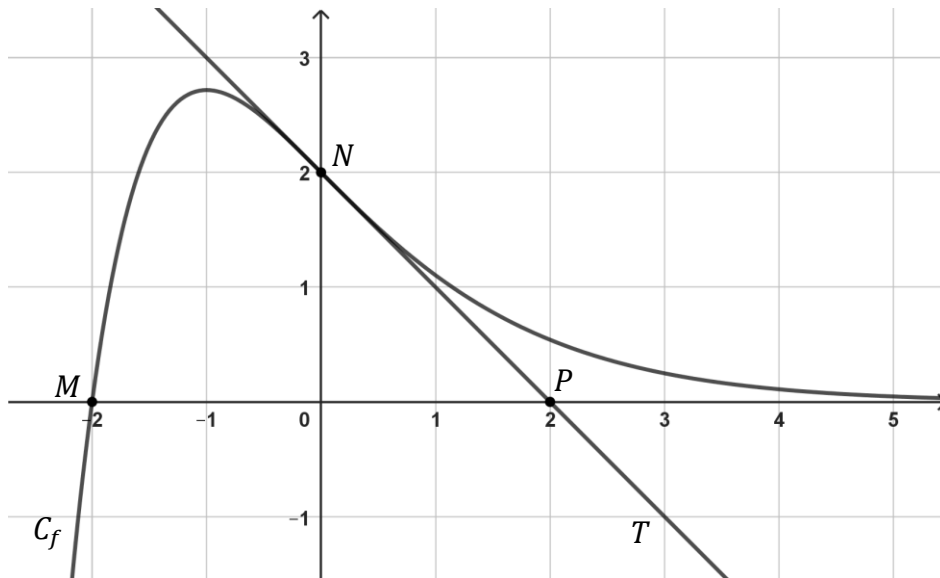
Exercice 4 (6 points)

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.

Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative C_f de la fonction f ;
- la tangente T à C_f en son point $N(0 ; 2)$;
- le point $M(-2 ; 0)$ appartenant à C_f et $P(2 ; 0)$ appartenant à la tangente T .

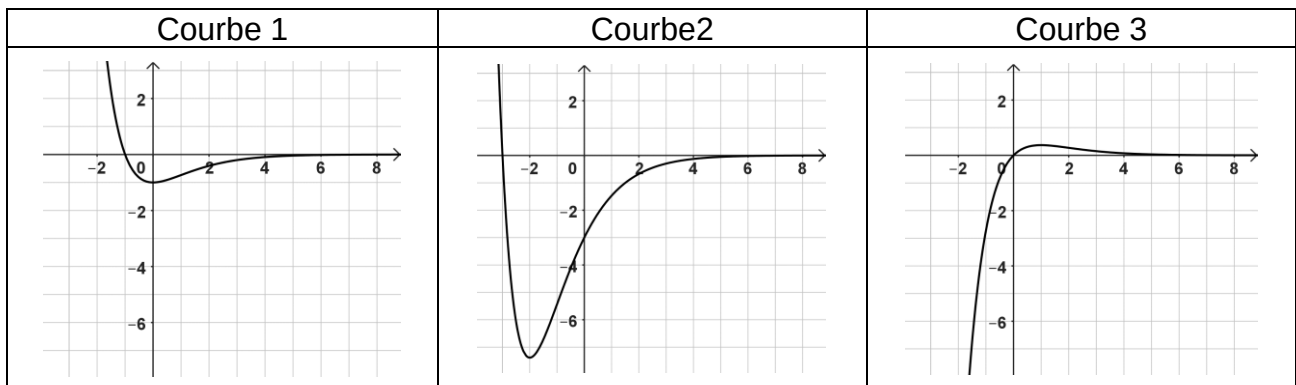
On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $] - \infty ; -1]$.



Partie A : étude graphique.

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1.
 - a. Donner $f(0)$.
 - b. Déterminer $f'(0)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.
4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Justifier.



Partie B : recherche d'une expression algébrique.

On admet que la fonction f est de la forme $f(x) = (ax + b)e^{\lambda x}$, où a , b et λ sont des constantes réelles. Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.
2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a .
3. Déterminer une expression algébrique de f . Justifier.

Partie C : étude algébrique.

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. On admet que $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$. Dresser le tableau de variations complet de f . Justifier.
3.
 - a. Étudier la convexité de f .
 - b. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe C_f .
4. Pour tout nombre réel $t \geq 0$, on pose :

$$I(t) = \int_{-2}^t f(x) dx .$$

- a. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I(t) = (-t - 3)e^{-t} + e^2 .$$

- b. En déduire un exemple de surface non limitée dont l'aire est finie.