

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x) .$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. a. Démontrer que la limite de la fonction f en 0 est égale à 0.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$.

3. a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$:

$$f''(x) = 4(1 - \ln(x)) .$$

b. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

(On admettra que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = 2$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$.)

4. a. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0; +\infty[$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2} .

b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ ainsi que le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

5. a. En utilisant l'égalité $f'(\alpha) = 0$, démontrer que :

$$\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha} .$$

En déduire que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.

b. En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de la fonction f .