

Exercice 4. (6 points)**Thèmes : suites, fonctions**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

1.

- a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.
- b. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $-3 < u_n \leq -1$.
- c. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
- d. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

2. On se propose d'étudier la fonction g définie sur $] -3 ; -1]$ par :

$$g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x.$$

- a. Justifier toutes les informations données par le tableau de variations de la fonction g (limites, variations, image de -1)

x	-3	-2	-1
Variations de g .			

- b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution que l'on notera α et dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-3} .

3. Dans la suite de l'exercice, on considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbf{N}$, par :

$$v_n = \ln(0,5u_n + 1,5).$$

- a. En utilisant la formule donnée à la question **1. a.**, démontrer que (v_n) est arithmétique de raison $\ln(0,9)$.
- b. Soit n un entier naturel.
Démontrer que $u_n = v_n$ si, et seulement si $g(u_n) = 0$.
- c. Démontrer qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbf{N}$ pour lequel $u_k = \alpha$.
- d. En déduire qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbf{N}$ pour lequel $v_k = u_k$.