

EXERCICE 4 (5 points)

L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droites non coplanaires.

Par définition, la distance entre deux droites non coplanaires de l'espace, (d_1) et (d_2) est la longueur du segment $[EF]$, où E et F sont des points appartenant respectivement à (d_1) et à (d_2) tels que la droite (EF) est orthogonale à (d_1) et à (d_2) .

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit (d_1) , la droite passant par $A(1; 2; -1)$ de vecteur directeur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et (d_2) la droite dont

une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (d_1) .

2. Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.

3. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\vec{u}_1$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $-2x + y + 5z + 5 = 0$

4. a. Sans chercher à calculer les coordonnées du point d'intersection, justifier que la droite (d_2) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.

b. On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathcal{P}$.

Vérifier que le point F a pour coordonnées $\left(0; -\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\vec{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; -1\right)$.

5. a. Justifier que la distance EF est la distance entre les droites (d_1) et (d_2) .

b. Calculer la distance entre les droites (d_1) et (d_2) .