

Exercice 4 (6 points)

Pour tout entier naturel n , on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin(x) dx$$

$$J_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \cos(x) dx$$

1. Calculer I_0 .
2.
 - a. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geq 0$.
 - b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leq 0$.
 - c. Dédire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.
3.
 - a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$I_n \leq \int_0^{\pi} e^{-nx} dx$$

- b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^{\pi} e^{-nx} dx = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$$

- c. Dédire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n) .
4.
 - a. En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - n J_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n} J_n$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $I_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{n^2 + 1}$.
5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1. Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1  from math import *
2  def seuil() :
3      n=0
4      I=2
5      . . .
6      n=n+1
7      I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8  return n
```