

Exercice 4. (6 points)

L'objectif de cet exercice est de conjecturer en partie A puis de démontrer en partie B le comportement d'une suite.

Les deux parties peuvent cependant être traitées de manière indépendante.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}.$$

Partie A

1. Recopier et compléter la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n .

```
def suite(n):  
    u = ...  
    for i in range(n):  
        ...  
    return u
```

2. L'exécution de `suite(2)` renvoie `1.3333333333333333`.
Effectuer un calcul pour vérifier et expliquer cet affichage.
3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n) .

```
>> suite(2)  
1.3333333333333333  
>> suite(5)  
1.0058479532163742  
>> suite(10)  
1.0000057220349845  
>> suite(20)  
1.0000000000005457
```

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $] -\infty ; 5[$ par :

$$f(x) = \frac{4}{5 - x}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $] -\infty ; 5[$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4.$$

3. a. Soit x un réel de l'intervalle $] -\infty ; 5[$. Prouver l'équivalence suivante :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0.$$

- b. Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $] -\infty ; 5[$.
4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.
5. Le comportement de la suite serait-il identique en choisissant comme terme initial $u_0 = 4$ au lieu de $u_0 = 3$?