

#### Exercice 4 (5 points)

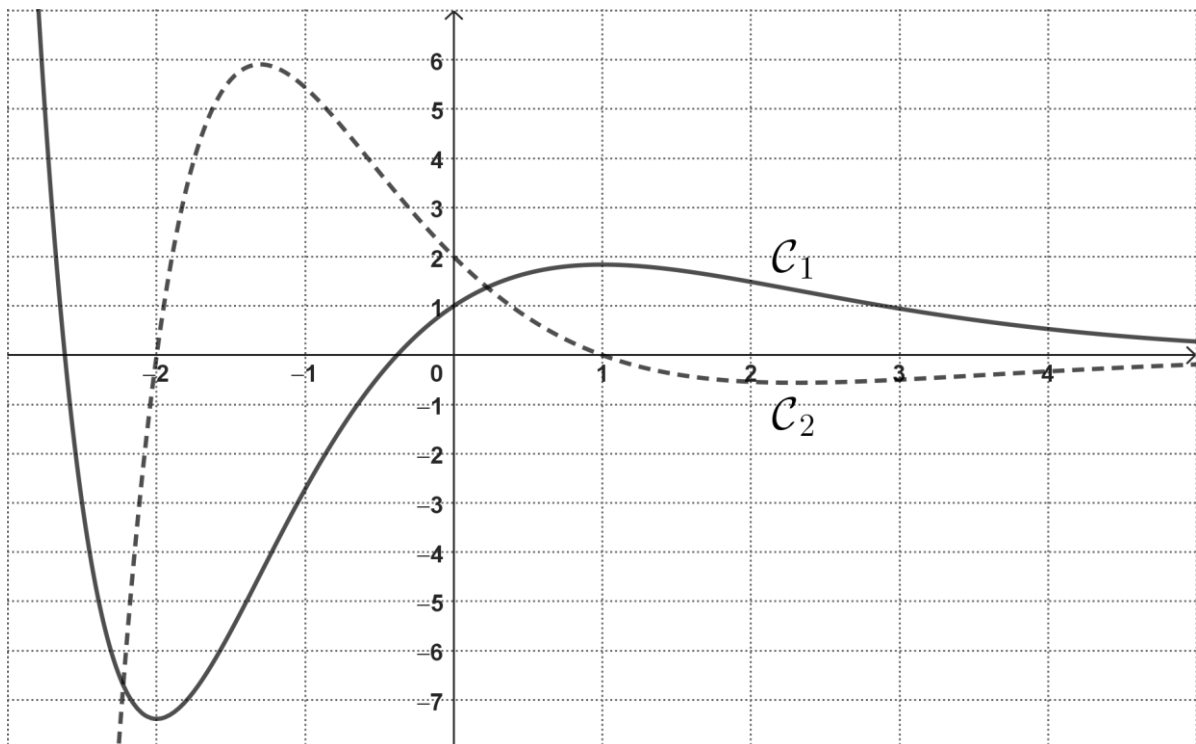
La partie C est indépendante des parties A et B.

##### Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$ . L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera  $g$  et  $g'$ .

On précise également que :

- La courbe  $\mathcal{C}_1$  coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées  $(0; 1)$ .
- La courbe  $\mathcal{C}_2$  coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées  $(0; 2)$  et l'axe des abscisses aux points de coordonnées  $(-2; 0)$  et  $(1; 0)$ .



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions  $g$  et  $g'$  sa représentation graphique.
2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $g$  au point d'abscisse 0 est  $y = 2x + 1$ .

## Partie B

On considère  $(E)$  l'équation différentielle  $y + y' = (2x + 3)e^{-x}$ , où  $y$  est une fonction de la variable réelle  $x$ .

1. Montrer que la fonction  $f_0$  définie pour tout nombre réel  $x$  par  $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$  est une solution particulière de l'équation différentielle  $(E)$ .
2. Résoudre l'équation différentielle  $(E_0) : y + y' = 0$ .
3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle  $(E)$ .
4. On admet que la fonction  $g$  décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle  $(E)$ . Déterminer alors l'expression de la fonction  $g$ .
5. Déterminer les solutions de l'équation différentielle  $(E)$  dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

## Partie C

On considère la fonction  $f$  définie pour tout nombre réel  $x$  par :

$$f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$$

1. Démontrer que la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$  est égale à 0.  
On admet par ailleurs que la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$  est égale à  $+\infty$ .
2. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - a. Vérifier que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$ .
  - b. Déterminer le signe de la fonction dérivée  $f'$  sur  $\mathbb{R}$  puis en déduire les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Expliquer pourquoi la fonction  $f$  est positive sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
4. On notera  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
On admet que la fonction  $F$  définie pour tout nombre réel  $x$  par  $F(x) = (-x^2 - 5x - 7)e^{-x}$  est une primitive de la fonction  $f$ .  
Soit  $\alpha$  un nombre réel positif.  
Déterminer l'aire  $\mathcal{A}(\alpha)$ , exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}_f$  et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = \alpha$ .