

Exercice 4 (5 points)

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est **vraie** ou **fausse**, en **justifiant** la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) - x^2.$$

Affirmation 1 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2. On considère l'équation différentielle $(E) : -2y' + 3y = \sin(x) + 8\cos(x)$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = 2 \cos(x) - \sin(x).$$

Affirmation 2 : La fonction f est solution de l'équation différentielle (E) .

3. On considère la fonction g , définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(3x + 1) + 8.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 25$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = g(u_n).$$

On admet que la suite (u_n) est strictement positive.

Affirmation 3 : La suite (u_n) est décroissante.

4. On considère une fonction affine h définie sur $\mathbf{R}$.

On note k la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $k(x) = x^4 + x^2 + h(x)$.

Affirmation 4 : La fonction k est convexe sur $\mathbf{R}$.

5. Une anagramme d'un mot est le résultat d'une permutation des lettres de ce mot.

Exemple : le mot BAC possède 6 anagrammes : BAC, BCA, ABC, ACB, CAB, CBA.

Affirmation 5 : Le mot EULER possède 120 anagrammes.