

Exercice 4. (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x)$.

Affirmation 1 :

$$\int_1^e f(x) dx = \frac{e^2 + 1}{4}$$

2. Soient n et k deux entiers naturels non nuls tels que $k \leq n$.

Affirmation 2 :

$$n \times \binom{n-1}{k-1} = k \times \binom{n}{k}$$

3. Pour les trois affirmations suivantes, on considère que l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit d la droite de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Soit d' la droite de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 2t' - 1 \\ y = -t' + 2 \\ z = t' + 1 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Soit P le plan d'équation cartésienne : $2x + y - 2z + 18 = 0$.

Soit A le point de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ et B le point de coordonnées $(-5 ; -5 ; 6)$.

On appelle plan médiateur du segment $[AB]$ le plan passant par le milieu du segment $[AB]$ et orthogonal à la droite (AB) .

Affirmation 3 : Le point A appartient à la droite d .

Affirmation 4 : Les droites d et d' sont sécantes.

Affirmation 5 : Le plan P est le plan médiateur du segment $[AB]$.