

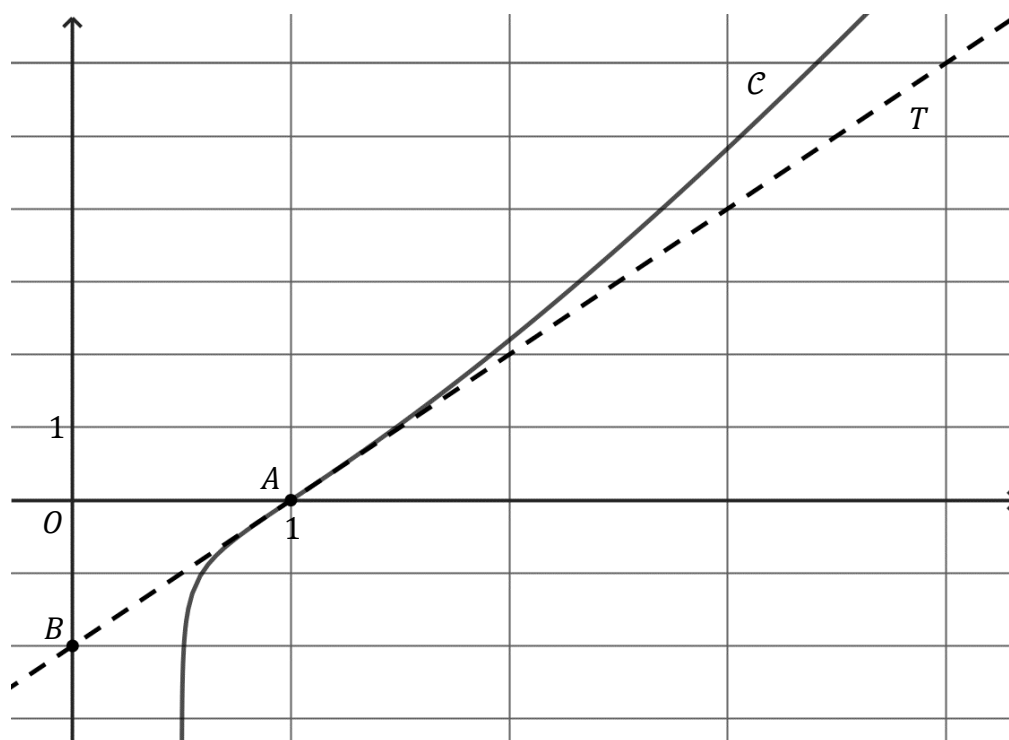
Exercice 4 (6 points)

Partie A : lecture graphique

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$.

On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

On a tracé, dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction f , notée $\mathcal{C}$, ainsi que la tangente T à $\mathcal{C}$ au point $A(1; 0)$. On précise que T passe par le point $B(0; -2)$.



On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer $f'(1)$.
2. La fonction f est-elle concave sur $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$?
3. Déterminer $f''(1)$.

Partie B : étude de fonction

On admet que la fonction représentée graphiquement dans la partie A est définie sur l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ par :

$$f(x) = x \ln(2x - 1)$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On rappelle que :

- la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$, que f' désigne sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde ;
- $\mathcal{C}$ désigne la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$.

1. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $\frac{1}{2}$. En déduire une interprétation graphique.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$.
3. On admet que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$:

$$f'(x) = \ln(2x - 1) + \frac{2x}{2x - 1}.$$

- a. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$:

$$f''(x) = \frac{4(x - 1)}{(2x - 1)^2}.$$

- b. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion et que ce point est l'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

4.

- a. Montrer que la fonction f est positive sur l'intervalle $[1; 2]$.
- b. On admet que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$, on a :

$$\frac{x^2}{2x - 1} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{2}{2x - 1}.$$

Montrer que :

$$\int_1^2 \frac{x^2}{2x - 1} dx = 1 + \frac{1}{8} \ln(3).$$

- c. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

En vous aidant d'une intégration par parties, déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$ en unité d'aire.

Partie C : généralisation

On désigne par a un réel strictement positif et par f_a la fonction définie sur l'intervalle $] \frac{1}{a} ; +\infty[$ par :

$$f_a(x) = x \ln(ax - 1).$$

On admet que f_a est deux fois dérivable sur l'intervalle $] \frac{1}{a} ; +\infty[$. On note f'_a sa fonction dérivée, f''_a sa fonction dérivée seconde, et $\mathcal{C}_a$ sa représentation graphique.

On admet que pour tout x appartenant à l'intervalle $] \frac{1}{a} ; +\infty[$:

$$f''_a(x) = \frac{a(ax - 2)}{(ax - 1)^2}.$$

1. Montrer que pour tout réel a strictement positif, la courbe $\mathcal{C}_a$ admet un unique point d'inflexion A_a .
2. Montrer que les points A_a sont alignés, a appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.