

EXERCICE 4 (6 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

- Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- Pour tout réel strictement positif x , démontrer que $f'(x) = \frac{1-2\ln(x)}{x^3}$.
- Dresser le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs exactes des éventuels extremums de la fonction.
- Déterminer l'équation réduite de la droite Δ , tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
- Vérifier que pour tout réel strictement positif x , on a $f''(x) = \frac{-5+6\ln(x)}{x^4}$.
- Étudier la convexité de la fonction f en précisant les coordonnées des éventuels points d'inflexion.
 - En déduire que, pour tout réel x appartenant à $]0; e^{\frac{5}{6}}]$, on a $x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}$.
- Justifier que, pour tout réel x appartenant à $[e^{\frac{5}{6}}; +\infty[$, on a aussi $x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}$.

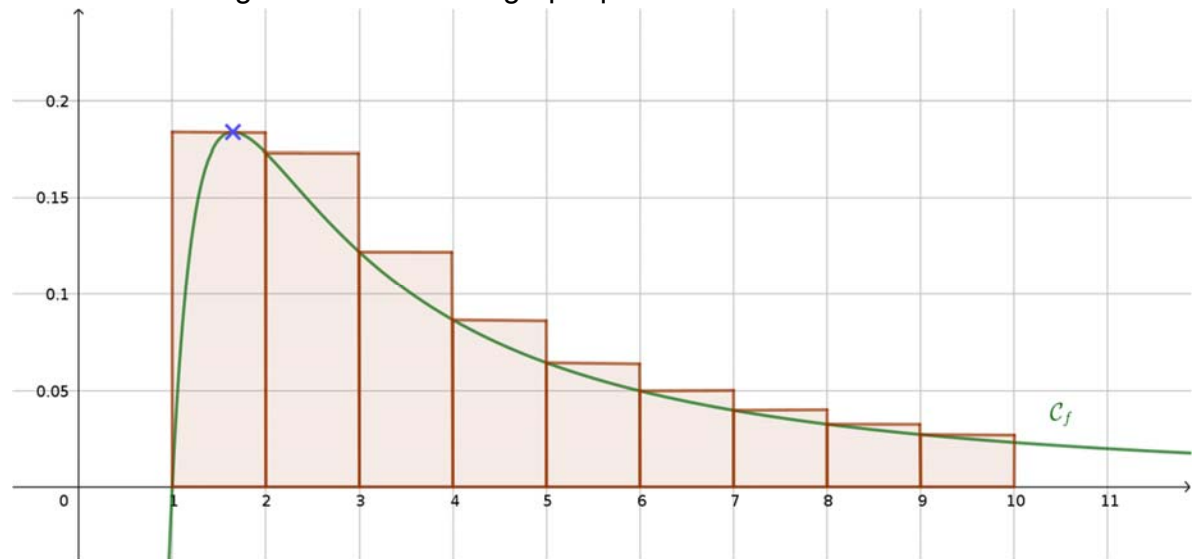
Partie B

On considère la suite (I_n) définie, pour tout entier naturel non nul n , par :

$$I_n = \int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2} dx.$$

- Donner une interprétation graphique de I_n pour n un entier naturel non nul.
- Démontrer que la suite (I_n) est croissante.

3. On souhaite calculer une approximation de $\int_1^{10} f(x)dx$ en déterminant la somme des aires des rectangles tracés dans le graphique ci-dessous.



Pour cela, on utilise le script suivant, écrit en langage Python.

```
from math import *

S=1/(2*exp(1))
for i in range (2,10):
    S = ...
print(S)
```

Recopier et compléter ce script afin qu'il réponde au problème posé.

4. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel non nul n ,

$$I_n = \frac{n - 1 - \ln(n)}{n}$$

5. Calculer la limite de la suite (I_n) quand n tend vers $+\infty$.