

Exercice 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] - 1 ; +\infty[$ par :

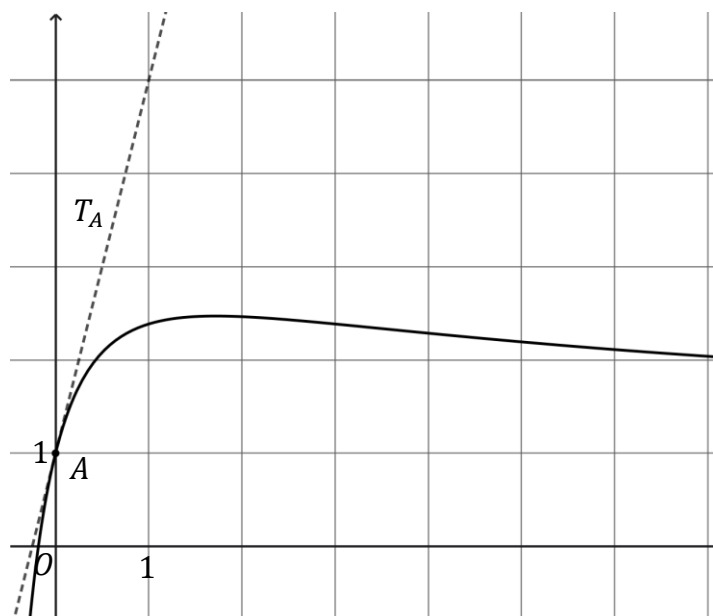
$$f(x) = a + \frac{b \ln(x+1)}{x+1},$$

où a et b sont des réels, et $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $] - 1 ; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

L'objectif de cette partie est de déterminer les valeurs de a et b de sorte que la courbe représentative de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$ corresponde à celle tracée dans le repère orthonormé ci-dessous :



On précise que la droite T_A est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point $A(0 ; 1)$.

1. Justifier que $a = 1$.
2. En utilisant le graphique :
 - a. Donner la valeur de $f'(0)$. Justifier.
 - b. Donner le signe de $f''(1)$. Justifier.
3.
 - a. Montrer que pour tout réel x appartenant à $] - 1 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{b(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}.$$

- b. En déduire la valeur de b .

Partie B

On admet dans la suite de l'exercice que la fonction f est définie sur $] - 1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{4 \ln(x + 1)}{x + 1}.$$

1. Justifier que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f .
2. Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x + 1) > 0$ sur $] - 1 ; +\infty[$.
3. On admet que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$.

Dresser le tableau de variation complet de la fonction f en indiquant la valeur exacte de son extremum. Justifier.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2 ; +\infty[$. En donner une valeur arrondie à 10^{-1} .

5.

- a. Montrer que :

$$\int_0^2 \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} dx = \frac{1}{2} (\ln 3)^2.$$

- b. En déduire l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.