

EXERCICE 4 (7 points)

Principaux domaines abordés :

Fonctions, Fonction exponentielle, Fonction logarithme ;
Suites.

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x de $]0 ; 1]$ par :

$$f(x) = e^{-x} + \ln(x) .$$

1. Calculer la limite de f en 0.
2. On admet que f est dérivable sur $]0 ; 1]$. On note f' sa fonction dérivée.
Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $]0 ; 1]$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - xe^{-x}}{x} .$$

3. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]0 ; 1]$, on a $xe^{-x} < 1$.
En déduire le tableau de variation de f sur $]0 ; 1]$.
4. Démontrer qu'il existe un unique réel ℓ appartenant à $]0 ; 1]$ tel que $f(\ell) = 0$.

Partie B

1. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{10} \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad \begin{cases} a_{n+1} = e^{-b_n} \\ b_{n+1} = e^{-a_n} \end{cases}$$

- a. Calculer a_1 et b_1 . On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.
- b. On considère ci-dessous la fonction `termes`, écrite en langage Python.

```
def termes(n):  
    a=1/10  
    b=1  
    for k in range(0,n):  
        c=...  
        b=...  
        a=c  
    return(a,b)
```

Recopier et compléter sans justifier le cadre ci-dessus de telle sorte que la fonction `termes` calcule les termes des suites (a_n) et (b_n) .

2. On rappelle que la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbf{R}$.
a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1 .$$

- b. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.
3. On note A la limite de (a_n) et B la limite de (b_n) .
On admet que A et B appartiennent à l'intervalle $]0 ; 1]$, et que $A = e^{-B}$ et $B = e^{-A}$.
- a. Démontrer que $f(A) = 0$.
- b. Déterminer $A - B$.