

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n - u_n \ln u_n \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0,5; 1]$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

2. a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b. On note l la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de l .

Partie C

Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_k(x) = kx - x \ln x$$

1. Pour tout nombre réel k , montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = e^{k-1}$.

2. Vérifier que, pour tout nombre réel k , on a : $x_k = y_k$.

Exercice 4 (7 points)

Thème : géométrie dans l'espace

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(2; 4; 0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- la droite $\mathcal{D}'$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 + t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}'$ de la droite $\mathcal{D}'$.

b. Montrer que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

On admet dans la suite de cet exercice qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Cette droite Δ coupe chacune des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. On appellera M le point d'intersection de Δ et $\mathcal{D}$, et M' le point d'intersection de Δ et $\mathcal{D}'$.

On se propose de déterminer la distance MM' appelée « distance entre les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ».

2. Montrer que le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ .

3. On note $\mathcal{P}$ le plan contenant les droites $\mathcal{D}$ et Δ , c'est-à-dire le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

b. En déduire qu'une équation du plan $\mathcal{P}$ est : $2x - y - 5z = 0$.

c. On rappelle que M' est le point d'intersection des droites Δ et $\mathcal{D}'$. Justifier que M' est également le point d'intersection de $\mathcal{D}'$ et du plan $\mathcal{P}$.
En déduire que les coordonnées du point M' sont $(3; 1; 1)$.

4. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .

b. Justifier que le point M a pour coordonnées $(1; 2; 0)$.

c. Calculer la distance MM' .

5. On considère la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5t \\ y = 2 + 5t \\ z = 1 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que la droite d est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

b. On note ℓ la distance d'un point N de la droite d au plan $\mathcal{P}$. Exprimer le volume du tétraèdre $ANMM'$ en fonction de ℓ .

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

c. Justifier que, si N_1 et N_2 sont deux points quelconques de la droite d , les tétraèdres AN_1MM' et AN_2MM' ont le même volume.