

Exercice 4 (5 points)

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère le plan (P) d'équation :

$$(P) : 2x + 2y - 3z + 1 = 0$$

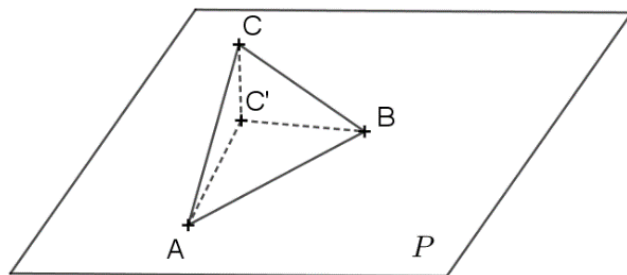
On considère les trois points A, B et C de coordonnées :

$$A(1; 0; 1), B(2; -1; 1) \text{ et } C(-4; -6; 5).$$

Le but de cet exercice est d'étudier le rapport des aires entre un triangle et son projeté orthogonal dans un plan.

Partie A

1. Pour chacun des points A, B et C, vérifier s'il appartient au plan (P) .
2. Montrer que le point $C'(0; -2; -1)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P) .
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .
4. On admet l'existence d'un unique point H vérifiant les deux conditions
 $\begin{cases} H \in (AB) \\ (AB) \text{ et } (HC) \text{ sont orthogonales.} \end{cases}$
Déterminer les coordonnées du point H.



Partie B

On admet que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HC}$ sont : $\overrightarrow{HC} \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ -\frac{11}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\|\overrightarrow{HC}\|$.
2. Soit S l'aire du triangle ABC. Déterminer la valeur exacte de S .

Partie C

On admet que $HC' = \sqrt{\frac{17}{2}}$.

1. Soit $\alpha = \widehat{CHC'}$. Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$.
2.
 - a. Montrer que les droites $(C'H)$ et (AB) sont perpendiculaires.
 - b. Calculer S' l'aire du triangle ABC' , on donnera la valeur exacte.
 - c. Donner une relation entre S , S' et $\cos(\alpha)$.