

Exercice 4 (5 points)

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ par $f(x) = e^x \sin(x)$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

PARTIE A

1. a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; \pi]$, $f'(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x))$.
b. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
b. Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.
c. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $e^x \sin(x) \geq x$.
3. Justifier que le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$.

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes : $I = 1 + J$ et $I = e^{\frac{\pi}{2}} - J$
2. En déduire que $I = \frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.
3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.
Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.
Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

