

Exercice 4 : (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(4; -1; 3)$, $B(-1; 1; -2)$, $C(0; 4; 5)$ et $D(-3; -4; 6)$.

1. a. Vérifier que les points A, B, C ne sont pas alignés.

On admet qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $29x + 30y - 17z = 35$.

- b. Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ? Justifier.

On admet que lorsque quatre points ne sont pas coplanaires, il existe un unique point situé à égale distance de ces quatre points.

L'objectif de cet exercice est de déterminer le point H se situant à égale distance des quatre points A, B, C, D.

On définit le plan médiateur d'un segment comme le plan passant par le milieu de ce segment et orthogonal à la droite portant ce segment. C'est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

2. Soit P_1 le plan médiateur du segment [AB].

- a. Déterminer les coordonnées du milieu du segment [AB].

- b. En déduire qu'une équation cartésienne de P_1 est : $5x - 2y + 5z = 10$.

3. On note P_2 le plan médiateur du segment [CD].

- a. Soit M un point du plan P_2 de coordonnées $(x; y; z)$.

Exprimer MC^2 et MD^2 en fonction des coordonnées de M.

En déduire qu'une équation cartésienne du plan P_2 est : $-3x - 8y + z = 10$.

- b. Justifier que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

4. Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -2 - 1,9t \\ y = t \\ z = 4 + 2,3t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbf{R}$$

Démontrer que Δ est la droite d'intersection de P_1 et P_2 .

On note P_3 le plan médiateur du segment [AC].

On admet qu'une équation cartésienne du plan P_3 est : $8x - 10y - 4z = -15$.

5. Démontrer que la droite Δ et le plan P_3 sont sécants.

6. Justifier que le point d'intersection entre Δ et P_3 est le point H.