

Exercice 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = x \ln x$.
 - a. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) = 4(g(\sqrt{x}))^2$.
 - b. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
3. Dans cette question, on étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - a. Démontrer que sur l'intervalle $]0; +\infty[$ $f'(x) = (\ln x)(2 + \ln x)$.
 - b. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - c. Donner la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $]0; 1]$.
4. On considère l'équation $f(x) = 2$.
 - a. Justifier que, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, cette équation admet une unique solution. On note α cette solution.
 - b. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.
5. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1]$.
 - a. Donner une interprétation géométrique de $\int_a^1 f(x) dx$.
 - b. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que :
$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 - \int_1^a x \ln x dx.$$
 - c. En utilisant à nouveau une intégration par parties, démontrer que :
$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 + \frac{a^2}{2} \ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}.$$
 - d. Déterminer la limite de $\int_a^1 f(x) dx$ quand a tend vers 0.