

Exercice 3 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Le plan est muni d'un repère orthonormé.

- a. On considère l'équation différentielle $(E_1) : y' + 2y = 0$, où y est une fonction de la variable x définie sur $\mathbb{R}$.

On note f la solution de l'équation différentielle (E_1) telle que $f(0) = 1$.

Affirmation 1 : La courbe représentative de la fonction f passe par le point A de coordonnées $(\ln 2 ; \frac{1}{2})$.

- b. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ par :

$$f(x) = x - \cos(x).$$

Affirmation 2 : Sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2}; \pi]$, la courbe représentative de la fonction f est au-dessus de ses tangentes.

- c. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{\sin(x)}{x}.$$

Affirmation 3 : La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale de la courbe représentative de la fonction f .

2. On considère l'équation différentielle $(E_2) : y' - 3y = 2 - 6x$, où y est une fonction de la variable x définie sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 4 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - e^{3x}$ est une solution de l'équation (E_2) .

Exercice 4 (5 points)

On considère la fonction f_k définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f_k(x) = 1 - x + \frac{k(1 + \ln x)}{x}$$

où k est un réel strictement positif et $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On désigne par C_k la représentation graphique de la fonction f_k dans un repère orthonormé.

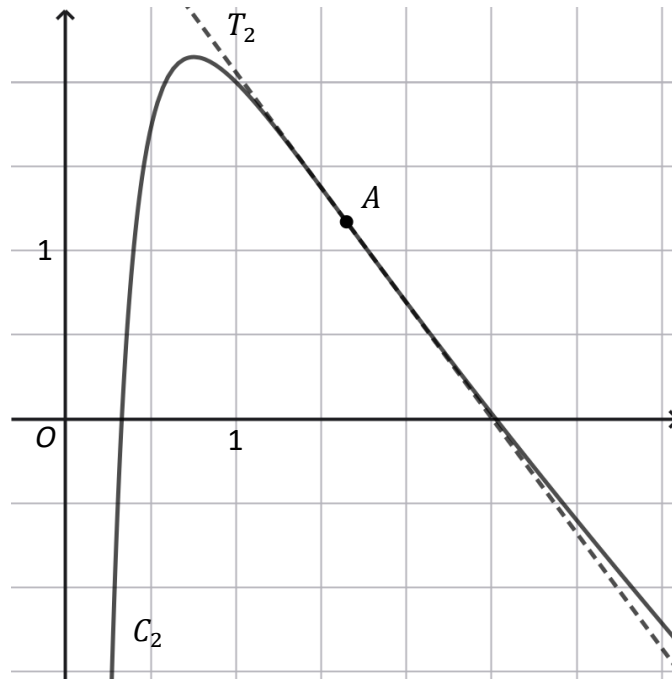
On admet que la fonction f_k est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$. On note f'_k sa dérivée première et f''_k sa dérivée seconde.

Partie A : étude d'un premier cas particulier

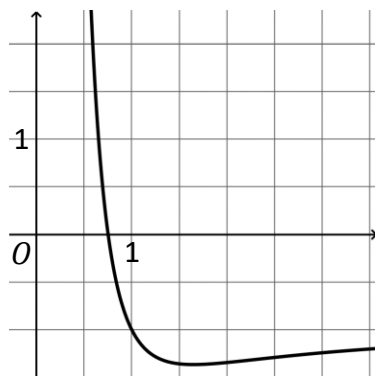
Dans cette partie, on se place dans le cas $k = 2$.

La courbe C_2 est représentée sur le graphique ci-dessous. On précise que :

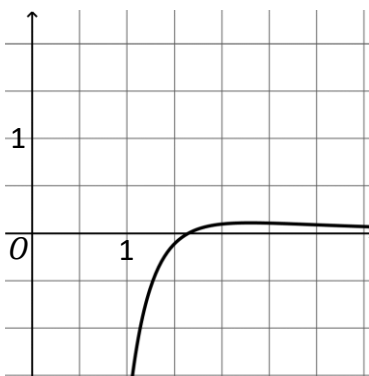
- Le point A est un point d'inflexion de la courbe C_2 ;
- T_2 est la tangente à la courbe C_2 au point A .



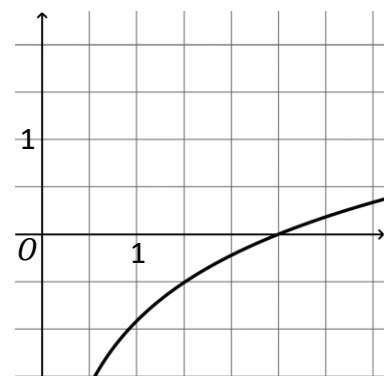
1. On considère une primitive F_2 de la fonction f_2 sur $]0 ; +\infty[$. Avec la précision permise par le graphique, donner les variations de la fonction F_2 sur l'intervalle $]0 ; 3]$.
2. Parmi les trois courbes ci-dessous, indiquer celle qui représente f_2' et celle qui représente f_2'' . Justifier.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

Partie B : étude d'un second cas particulier

Dans cette partie on se place dans le cas $k = 1$.

On considère la fonction f_1 définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f_1(x) = 1 - x + \frac{1 + \ln x}{x}.$$

1.

a. Montrer que pour tout réel $x > 0$:

$$f_1'(x) = -1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

b. Déterminer la limite de $f_1'(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. On admet que :

- l'axe des ordonnées est une asymptote de la courbe de f_1' ;
- pour tout réel $x > 0$, $f_1''(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x^3}$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de f_1' sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

x	0	$\frac{1}{e^2}$	$+\infty$
f_1'	$+\infty$	$-1 - \frac{1}{2e}$	-1

a. Justifier les variations de la fonction f_1' sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et la valeur de l'extremum.

b. Justifier la limite de la fonction f_1' en 0.

c. Montrer qu'il existe une unique solution α à l'équation $f_1'(x) = 0$ sur $]0 ; +\infty[$. En déduire que f_1 admet un maximum sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

d. Recopier et compléter les pointillés du programme écrit en langage Python ci-dessous, afin qu'il renvoie une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution α de l'équation $f_1'(x) = 0$ sur $]0 ; +\infty[$.

```
def d(x) :
    return -1 - ln(x)/x**2

def alpha() :
    u = 0.5
    while d(u) ... 0 :
        u = ...
    return u
```

On rappelle que $x**2$ désigne x^2 .

Partie C : k quelconque

On considère la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1+\ln x}{x}$ et la fonction H définie sur $]0 ; +\infty[$ par $H(x) = \frac{1}{2}(1 + \ln x)^2$. On admet que H est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

1. Montrer que la fonction H est une primitive de h .

On rappelle que k est un réel strictement positif et que f_k est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f_k(x) = 1 - x + \frac{k(1 + \ln x)}{x}.$$

2. Existe-t-il une valeur de k pour laquelle la valeur moyenne de la fonction f_k sur l'intervalle $[1 ; e]$ est égale à 0 ? Justifier.