

On considère la variable aléatoire X qui, à tout échantillon ainsi défini, associe le nombre de musiciens professionnels dans l'échantillon.

Affirmation 2 : En arrondissant le résultat au dixième, on a $P(X \leq 340) \approx 0,4$.

Affirmation 3 : En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on peut affirmer qu'il y a plus de 95 % de chance que, sur cet échantillon de 5 000 actifs dans le secteur de la culture, le nombre de musiciens professionnels soit strictement compris entre 230 et 390.

3. Un jeu sur le thème de la culture de la Pop est proposé à 10 personnes dont 4 sont des musiciens professionnels. Deux équipes de 5 joueurs s'affrontent. Elles sont chacune constituées de 2 musiciens professionnels et de 3 personnes qui ne le sont pas.

Affirmation 4 : On peut former ainsi 120 équipes différentes.

Exercice 4 (6 points)

Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ dont on donne ci-dessous une partie de la courbe représentative C_f dans un repère orthogonal. On note f' sa fonction dérivée.

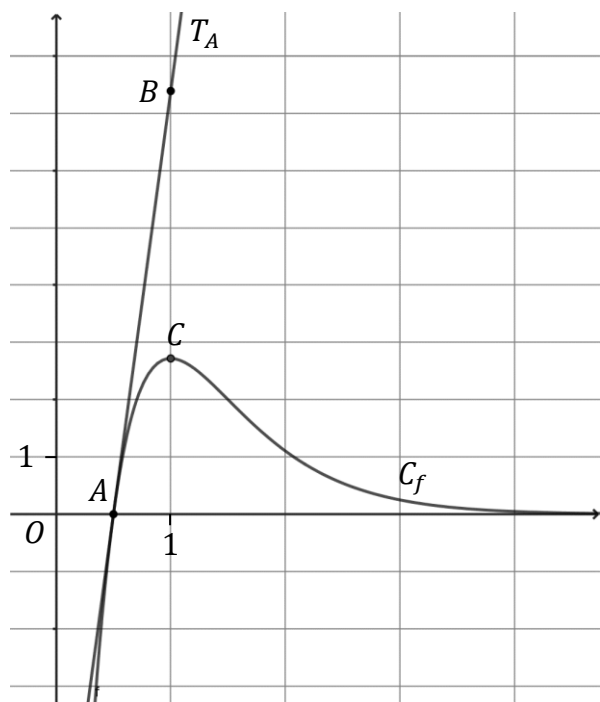
On précise que :

- la courbe C_f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point C d'abscisse 1 ;
- la tangente T_A à la courbe C_f au point $A\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$ passe par le point $B(1 ; e^2)$.

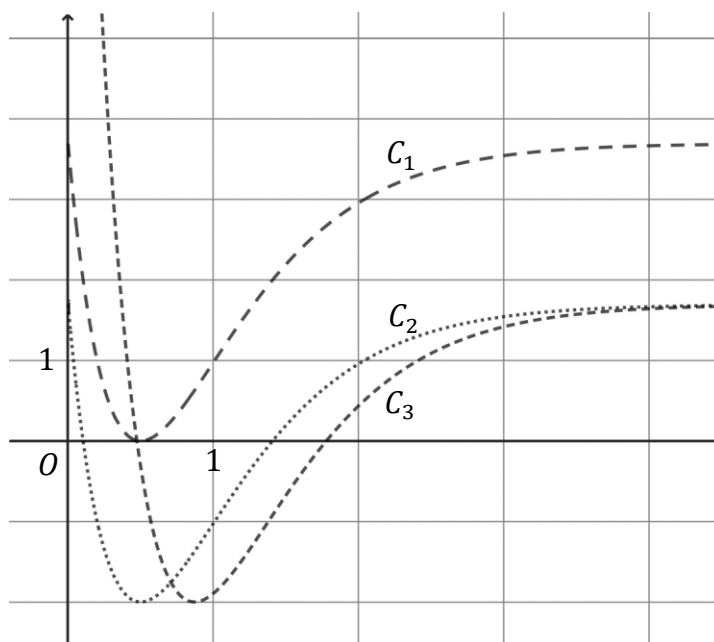
1. À l'aide du graphique ci-contre :

- Donner $f'(1)$.
- Donner la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0 ; 3]$.

2. Déterminer $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.



3. Parmi les trois courbes C_1 , C_2 et C_3 ci-dessous, deux représentent des primitives de la fonction f . Indiquer lesquelles et justifier.



Partie B

Un industriel doit créer un logo représentant la forme ci-contre (Fig. 1). La dimension de 0,3 cm indiquée sur la figure est une contrainte imposée par le client.

L'industriel choisit de modéliser le contour de ce logo à l'aide d'une portion de la courbe de la fonction f vue en partie A, et de l'image de cette portion par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses, sur un intervalle $[0,5 ; \alpha]$.

Le nombre α est un réel supérieur à 1 que l'on déterminera dans cette partie.

L'ensemble est représenté graphiquement dans un repère orthonormé (Fig. 2) d'unité 1 cm.

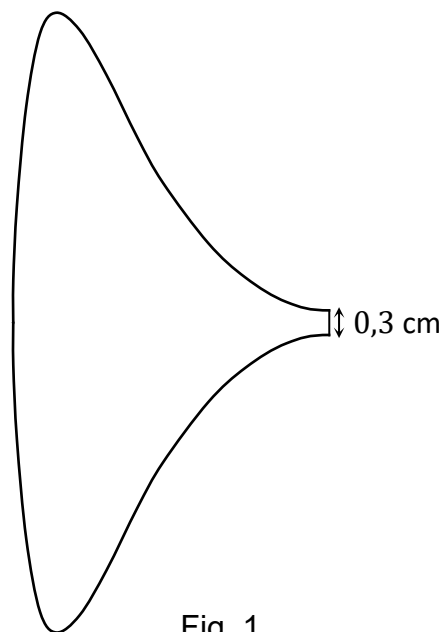


Fig. 1

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (2x - 1)e^{-2x+3}.$$

1.
 - a. Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

$$f(x) = e^2 \times \frac{2x - 1}{e^{2x-1}}.$$

- b. En déduire la limite de f en $+\infty$.
(On pourra poser $X = 2x - 1$).

2.
 - a. Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $f'(x) = (-4x + 4)e^{-2x+3}$.

- b. Construire le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

3. Justifier que la contrainte imposée par le client se traduit par l'égalité $f(\alpha) = 0,15$.
Montrer qu'il existe une unique valeur de α dans l'intervalle $[1 ; +\infty[$ qui permette de vérifier cette égalité. En donner une valeur arrondie au dixième.

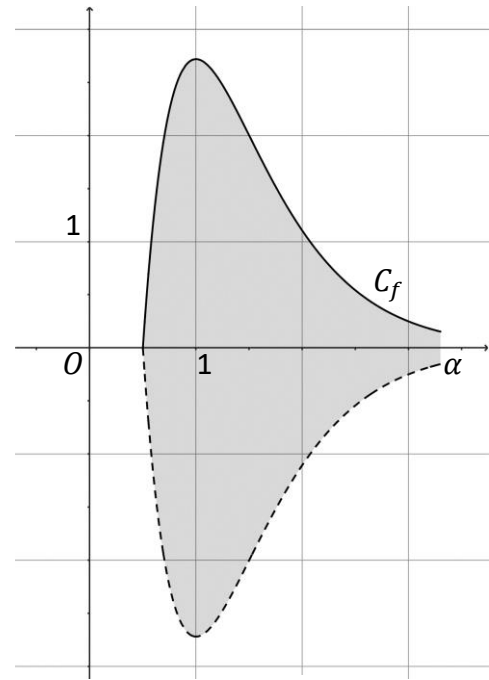


Fig. 2

Partie C

On fabrique un porte-clé en découpant une plaque d'acier suivant la forme du logo représenté par la surface grisée en figure 2 de la partie B. On précise que cette plaque a une épaisseur de 0,2 cm.

1. On considère :

$$I = \int_{0,5}^{3,3} f(x) dx.$$

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale I arrondie au dixième est égale à 3,6.

2. On précise que le volume du porte-clé est égal à :

$$\text{Aire du logo} \times \text{épaisseur de la plaque}.$$

Déterminer le volume du porte-clé en cm^3 , arrondi au dixième.