

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

EXERCICE A - Fonction ln

Partie A :

Dans un pays, une maladie touche la population avec une probabilité de 0,05. On possède un test de dépistage de cette maladie.

On considère un échantillon de n personnes ($n \geq 20$) prises au hasard dans la population assimilé à un tirage avec remise.

On teste l'échantillon suivant cette méthode : on mélange le sang de ces n individus, on teste le mélange. Si le test est positif, on effectue une analyse individuelle de chaque personne.

Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'analyses effectuées.

1. Montrer X_n prend les valeurs 1 et $(n + 1)$.

2. Prouver que $P(X_n = 1) = 0,95^n$.

Établir la loi de X_n en recopiant sur la copie et en complétant le tableau suivant :

x_i	1	$n + 1$
$P(X_n = x_i)$		

3. Que représente l'espérance de X_n dans le cadre de l'expérience ?

Montrer que $E(X_n) = n + 1 - n \times 0,95^n$.

Partie B :

1. On considère la fonction f définie sur $[20; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + x \ln(0,95)$

Montrer que f est décroissante sur $[20; +\infty[$.

2. On rappelle $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

3. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[20; +\infty[$.

Donner un encadrement à 0,1 près de cette solution.

4. En déduire le signe de f sur $[20; +\infty[$.

Partie C:

On cherche à comparer deux types de dépistages. La première méthode est décrite dans la partie A, la seconde, plus classique, consiste à tester tous les individus.

La première méthode permet de diminuer le nombre d'analyses dès que $E(X_n) < n$.

En utilisant la partie B, montrer que la première méthode diminue le nombre d'analyses pour des échantillons comportant 87 personnes maximum.