

## EXERCICE - B

### Principaux domaines abordés

- Étude de fonction, fonction exponentielle
- Équations différentielles

### Partie I

Considérons l'équation différentielle

$$y' = -0,4y + 0,4$$

où  $y$  désigne une fonction de la variable  $t$ , définie et dérivable sur  $[0; +\infty[$ .

- (a) Déterminer une solution particulière constante de cette équation différentielle.  
(b) En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.
- Déterminer la fonction  $g$ , solution de cette équation différentielle, qui vérifie  $g(0) = 10$ .

### Partie II

Soit  $p$  la fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $p(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{1 + 9e^{-0,4t}}$ .

- Déterminer la limite de  $p$  en  $+\infty$ .
- Montrer que  $p'(t) = \frac{3,6e^{-0,4t}}{(1 + 9e^{-0,4t})^2}$  pour tout  $t \in [0; +\infty[$ .
- (a) Montrer que l'équation  $p(t) = \frac{1}{2}$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[0; +\infty[$ .  
(b) Déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près à l'aide d'une calculatrice.

### Partie III

- $p$  désigne la fonction de la partie II.  
Vérifier que  $p$  est solution de l'équation différentielle  $y' = 0,4y(1 - y)$  avec la condition initiale  $y(0) = \frac{1}{10}$  où  $y$  désigne une fonction définie et dérivable sur  $[0; +\infty[$ .
- Dans un pays en voie de développement, en l'année 2020, 10 % des écoles ont accès à internet. Une politique volontariste d'équipement est mise en œuvre et on s'intéresse à l'évolution de la proportion des écoles ayant accès à internet. On note  $t$  le temps écoulé, exprimé en année, depuis l'année 2020.  
La proportion des écoles ayant accès à internet à l'instant  $t$  est modélisée par  $p(t)$ .  
Interpréter dans ce contexte la limite de la question II 1 puis la valeur approchée de  $\alpha$  de la question II 3(b) ainsi que la valeur  $p(0)$ .