

EXERCICE - B

Principaux domaines abordés

- Suites, étude de fonction
- Fonction logarithme

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x - 1)$.

On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

Partie I :

La feuille de calcul ci-dessous a permis d'obtenir des valeurs approchées des premiers termes de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	7,80277542
4	2	5,88544474
5	3	4,29918442
6	4	3,10550913
7	5	2,36095182
8	6	2,0527675
9	7	2,00134509
10	8	2,0000009

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour permettre le calcul des valeurs approchées de (u_n) par recopie vers le bas ?
2. À l'aide de ces valeurs, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .

Partie II :

On rappelle que la fonction f est définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x - 1)$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. On admettra que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
2. (a) Soit f' la fonction dérivée de f . Montrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x-2}{x-1}$.
(b) En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$, complété par les limites.
(c) Justifier que pour tout $x \geq 2$, $f(x) \geq 2$.

Partie III :

1. En utilisant les résultats de la partie II, démontrer par récurrence que $u_n \geq 2$ pour tout entier naturel n .
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note L sa limite.
4. On admet que L vérifie $f(L) = L$. Donner la valeur de L .