

EXERCICE B - Équation différentielle

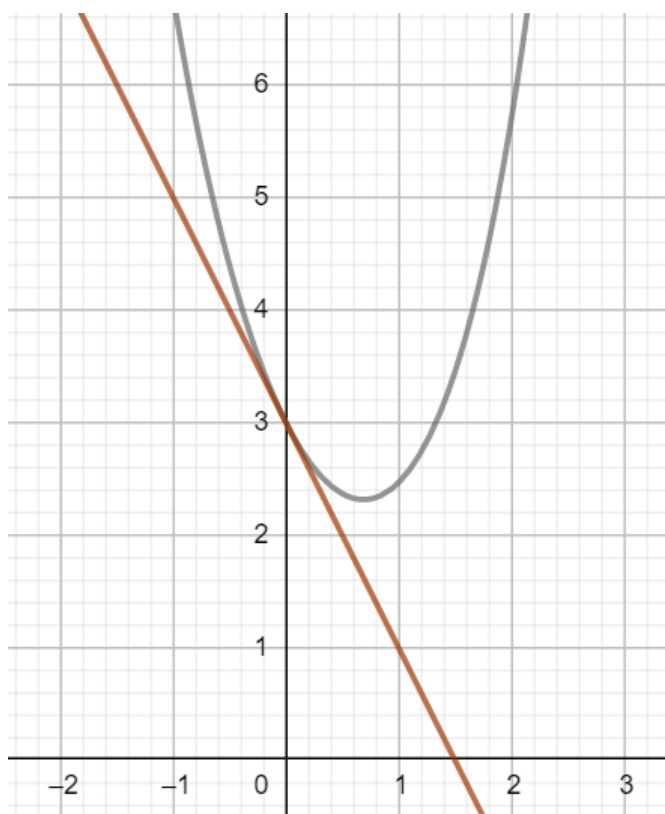
Partie A : Détermination d'une fonction f et résolution d'une équation différentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x + ax + be^{-x}$$

où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie.

Dans le plan muni d'un repère d'origine O , on a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$, représentant la fonction f , et la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. En utilisant l'expression de la fonction f , exprimer $f(0)$ en fonction de b et en déduire la valeur de b .
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - a. Donner, pour tout réel x , l'expression de $f'(x)$.
 - b. Exprimer $f'(0)$ en fonction de a .
 - c. En utilisant les questions précédentes, déterminer a , puis en déduire l'expression de $f(x)$.
4. On considère l'équation différentielle :
(E) : $y' + y = 2e^x - x - 1$
 - a. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = e^x - x + 2e^{-x}$$
est solution de l'équation (E).
 - b. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.
 - c. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

Partie B : Étude de la fonction g sur $[1 ; +\infty[$

1. Vérifier que pour tout réel x , on a :

$$e^{2x} - e^x - 2 = (e^x - 2)(e^x + 1)$$

2. En déduire une expression factorisée de $g'(x)$, pour tout réel x .

3. On admettra que, pour tout $x \in [1 ; +\infty[$, $e^x - 2 > 0$.

Étudier le sens de variation de la fonction g sur $[1 ; +\infty[$.