

Exercice 4 (5,25 points)

Soit n un entier naturel non nul.

Dans le cadre d'une expérience aléatoire, on considère une suite d'évènements A_n et on note p_n la probabilité de l'évènement A_n .

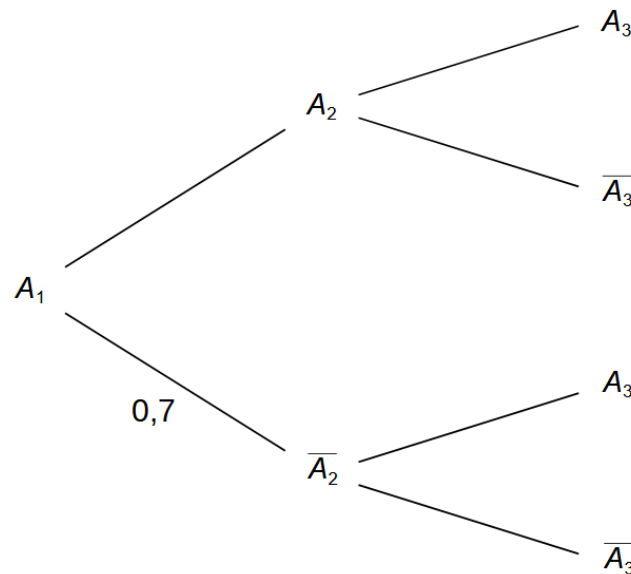
Pour les parties A et B de l'exercice, on considère que :

- Si l'évènement A_n est réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,3 .
- Si l'évènement A_n n'est pas réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,7 .

On suppose que $p_1 = 1$.

Partie A :

1. Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :



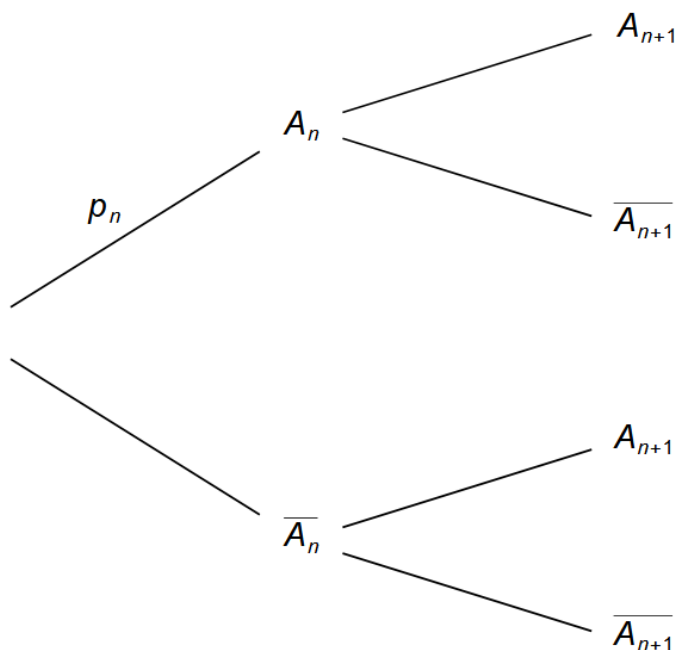
2. Montrer que $p_3 = 0,58$.

3. Calculer la probabilité conditionnelle $P_{A_3}(A_2)$, arrondir le résultat à 10^{-2} près.

Partie B :

Dans cette partie, on étudie la suite (p_n) avec $n \geq 1$.

1. Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :



2.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = -0,4 p_n + 0,7$.

On considère la suite (u_n) , définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,5$.

b. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c. En déduire l'expression de u_n , puis de p_n en fonction de n .

d. Déterminer la limite de la suite (p_n) .

Partie C

Soit $x \in]0 ; 1[$, on suppose que $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = P_{A_n}(\overline{A_{n+1}}) = x$. On rappelle que $p_1 = 1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = (1 - 2x)p_n + x$.

2. Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n non nul :

$$p_n = \frac{1}{2}(1 - 2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

3. Montrer que la suite (p_n) est convergente et donner sa limite.