

Mayotte-Liban 2022	
CORRECTION Nathalie Leclercq © https://www.vecteurbac.fr/	
CLASSE : Terminale STI2D	EXERCICE 3 : 4 points
VOIE : ☑ Générale	ENSEIGNEMENT : Physique-chimie
DURÉE DE L'ÉPREUVE : 0h54	CALCULATRICE AUTORISÉE : ☑ Oui sans mémoire, « type collège »

EXERCICE 3

Mathématiques Mayotte-Liban 2022

Question 1

Sur $[0; +\infty[$, $g'(t) = 6e^{-t}(1-t)$

1.

Pour tout réel $t \in [0; +\infty[$, $6e^{-t} > 0$

Donc le signe de $g'(t) = 6e^{-t}(1-t)$ est celui de $1-t$

$$1-t=0$$

$$-t=-1$$

$$t=1$$

Ainsi :

- $g'(1) = 0$
- $g'(t) > 0$ sur $[0; 1[$
- $g'(t) < 0$ sur $]1; +\infty[$

2.

$g'(t) > 0$ sur $[0; 1[$ on en déduit que la fonction g est strictement croissante sur $[0; 1]$

$g'(t) < 0$ sur $]1; +\infty[$ on en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

Question 2

1.

Le point A a pour affixe $z_A = e^{i\frac{5\pi}{6}}$: il est donc situé sur le cercle trigonométrique, à l'angle $\frac{5\pi}{6}$.

Le point B a pour affixe $z_B = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$: il est situé à l'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

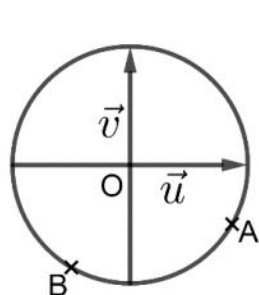


Figure 1

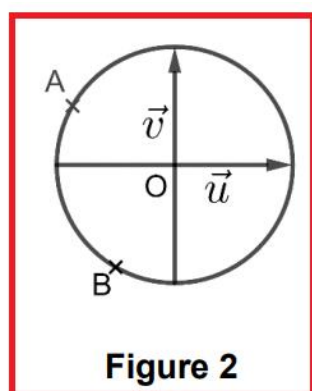


Figure 2

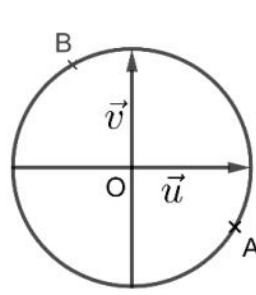


Figure 3

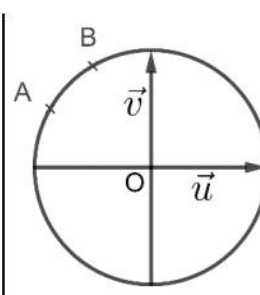


Figure 4

La Figure 2 qui représente correctement les points A et B.

2. On a :

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{e^{i\frac{5\pi}{6}}}{e^{-i\frac{2\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)} = e^{i\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$\frac{z_A}{z_B} = e^{i\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi \times 2}{3 \times 2}\right)}$$

$$\frac{z_A}{z_B} = e^{i\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{4\pi}{6}\right)}$$

$$\frac{z_A}{z_B} = e^{i\left(\frac{9\pi}{6}\right)}$$

$$\frac{z_A}{z_B} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Or $\frac{3\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ (puisque $\frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$), donc :

$$\frac{z_A}{z_B} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Un argument de $\frac{z_A}{z_B}$ est donc $-\frac{\pi}{2}$.

Question 3

Pour tout $x \in]1; +\infty[$

$$\ln(x-1) + \ln(x+1) + \ln(x) = \ln((x-1)(x+1)x)$$

$$\ln(x-1) + \ln(x+1) + \ln(x) = \ln(x(x^2-1))$$

$$\ln(x^2-1) - \ln(0,5) = \ln\left(\frac{x^2-1}{0,5}\right)$$

$$\ln(x^2-1) - \ln(0,5) = \ln(2(x^2-1))$$

L'équation devient donc :

$$\ln(x(x^2-1)) = \ln(2(x^2-1))$$

$$x(x^2-1) = 2(x^2-1)$$

$$x = 2$$

Cette valeur appartient bien à $]1; +\infty[$. L'unique solution de l'équation est donc $x = 2$.

Question 4

1.

L'équation (E) : $y' = -y + 2$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -1$ et $b = 2$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $f(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

$$f(t) = Ce^{-1t} - \frac{2}{-1}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

$$y(x) = Ce^{-x} + 2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2.

La condition $f(0) = 0$ donne :

$$Ce^0 + 2 = 0$$

$$C + 2 = 0$$

$$C = -2$$

La solution cherchée est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2e^{-x} + 2.$$

Question 5

1.

Pour tout réel x :

$$e^x(x^2e^{-x} - 2) = x^2e^xe^{-x} - 2e^x$$

$$e^x(x^2e^{-x} - 2) = x^2e^0 - 2e^x$$

$$e^x(x^2e^{-x} - 2) = x^2 - 2e^x$$

$$e^x(x^2e^{-x} - 2) = f(x)$$

On a donc, pour tout réel x , $f(x) = e^x(x^2e^{-x} - 2)$.

2.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2e^{-x} = 0$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2e^{-x} - 2) = -2$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Par produit d'une limite infinie et d'une limite finie non nulle négative :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Question 6

1.

D'après la formule $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, en prenant $a = t$ et $b = \frac{\pi}{6}$:

$$2\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos(t)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin(t)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$2\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos(t) \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin(t) \times \frac{1}{2}\right)$$

$$2\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\cos(t) - \sin(t)$$

$$2\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right) = u(t)$$

On a donc, pour tout réel t , $u(t) = 2\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$.

2.

On résout dans $[0; \pi[$:

$$u(t) = 1$$

$$2\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Mais $\cos\theta = \frac{1}{2}$ pour $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{3}$

On a donc :

$$t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$t = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ou

$$t + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$t = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Dans $[0 ; \pi[$: l'unique solution de l'équation $u(t) = 1$ sur $[0 ; \pi[$ est $t = \frac{\pi}{6}$.