

EXERCICE 3

Mathématiques Métropole 2022

Question 1

1.

On remarque que $2025 = 81 \times 25 = 3^4 \times 5^2$. Donc :

$$4\ln(3) + 2\ln(5) = \ln(3^4) + \ln(5^2)$$

$$4\ln(3) + 2\ln(5) = \ln(3^4 \times 5^2)$$

$$4\ln(3) + 2\ln(5) = \ln(2025)$$

Donc

$$\ln(2025) = 4\ln(3) + 2\ln(5)$$

2.

$$A = \ln(e^4) - 3\ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$A = 4 - 3\ln(e^{-1})$$

$$A = 4 - 3 \times -1$$

$$A = 8 + 3$$

$$A = 11$$

Question 2

1.

$$z = \frac{-1+i}{3i}$$

$$z = \frac{(-1+i) \times i}{3i \times i}$$

$$z = \frac{-i+i^2}{-i+i^2}$$

$$z = \frac{-i-1}{3 \times (-1)}$$

$$z = \frac{-i-1}{-3}$$

$$z = \frac{i+1}{3}$$

Donc :

$$z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$$

2.

Le module de z est :

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$|z| = \sqrt{\frac{2}{9}}$$

$$|z| = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

La forme exponentielle de z est donc :

$$z = \frac{\sqrt{2}}{3} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Question 3

1.

L'équation $(E) : 2y' + y = 0$ équivaut $y' = -\frac{1}{2}y$ est de la forme $y' = ay$ avec $a = -\frac{1}{2}$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $f(x) = Ce^{at}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

2.

La courbe représentative de f passe par le point $A(\ln(9); 1)$, donc :

$$f(\ln(9)) = 1$$

$$Ce^{-\frac{1}{2}\ln(9)} = 1$$

$$Ce^{\ln\left(9^{-\frac{1}{2}}\right)} = 1$$

$$C9^{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$C \times \frac{1}{\sqrt{9}} = 1$$

$$C \times \frac{1}{3} = 1$$

$$C = 3$$

La solution cherchée est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3e^{-\frac{1}{2}x}$$

Question 4

1.

$$\text{On a } g(0) = 0^2 - 4 \times 0 - 1 = -1$$

Le point A, d'abscisse 0, appartient à la fois à $\mathcal{C}_f$ et à $\mathcal{C}_g$, donc $f(0) = g(0)$.

$$\text{Or } f(0) = a + be^0 = a + b, \text{ donc :}$$

$$a + b = g(0) = -1$$

2. a.

Pour tout réel x , $g'(x) = 2x - 4$, donc :

$$g'(0) = 2 \times 0 - 4 = -4$$

b.

Pour tout réel x , $f'(x) = be^x$ (dérivée de $x \mapsto a + be^x$), donc $f'(0) = b$.

Comme $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont la même tangente T au point A, on a $f'(0) = g'(0)$, soit :

$$b = -4$$

D'après la question 1, $a + b = -1$, donc :

$$a = -1 - b$$

$$a = -1 - (-4)$$

$$a = 3$$

Question 5

1.

La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$g'(x) = x - \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$$

2.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $x > 0$, donc le signe de $g'(x)$ est celui de $(x-1)(x+1)$.

Comme $x > 0$, on a toujours $x+1 > 0$, donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$:

- pour $x \in]0; 1[$, $g'(x) < 0$: g est strictement décroissante ;
- $g'(1) = 0$;
- pour $x \in]1; +\infty[$, $g'(x) > 0$: g est strictement croissante.

La fonction g admet donc un minimum sur $]0; +\infty[$, atteint en $x = 1$, de valeur exacte :

$$g(1) = \frac{1}{2} \times 1^2 - \ln(1)$$

$$g(1) = \frac{1}{2} - 0$$

$$g(1) = \frac{1}{2}$$

Question 6

1.

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, en prenant $a = 50t$ et $b = \varphi$:

$$U_{\max}\cos(50t + \varphi) = U_{\max}\cos(50t)\cos(\varphi) - U_{\max}\sin(50t)\sin(\varphi)$$

$$U_{\max}\cos(50t + \varphi) = U_{\max}\cos(50t)\cos(\varphi) - U_{\max}\sin(50t)\sin(\varphi)$$

$$U_{\max}\cos(50t + \varphi) = \cos(50t) + \sqrt{3}\sin(50t)$$

Par identification des coefficients de $\cos(50t)$ et $\sin(50t)$:

$$U_{\max}\cos(50t)\cos(\varphi) = \cos(50t)$$

$$U_{\max}\cos(\varphi) = 1$$

$$-U_{\max}\sin(50t)\sin(\varphi) = \sqrt{3}\sin(50t)$$

$$U_{\max}\sin(\varphi) = -\sqrt{3}$$

On en déduit :

$$U_{\max}^2 = (U_{\max}\cos(\varphi))^2 + (U_{\max}\sin(\varphi))^2 = 1^2 + (-\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$$

puisque $U_{\max} > 0$, $U_{\max} = 2$

Donc $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, soit $\varphi = -\frac{\pi}{3}$

On a donc, pour tout réel t :

$$u(t) = 2\cos\left(50t - \frac{\pi}{3}\right),$$

avec $U_{\max} = 2 \text{ V}$, $\omega = 50 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\varphi = -\frac{\pi}{3} \text{ rad}$.

2.

La fréquence correspondante est :

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$f = \frac{50}{2\pi}$$

$$f = 8 \text{ Hz}$$

Arrondie à l'unité, la fréquence est donc $f = 8 \text{ Hz}$.