

Métropole juin 2021	
CORRECTION Nathalie Leclercq © https://www.vecteurbac.fr/	
CLASSE : Terminale STI2D	EXERCICE 3 : 4 points
VOIE : ☒ Générale	ENSEIGNEMENT : Physique-chimie
DURÉE DE L'ÉPREUVE : 0h54	CALCULATRICE AUTORISÉE : ☒ Oui sans mémoire, « type collège »

EXERCICE 3

Mathématiques Métropole juin 2021

Question 1

La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$, et sa dérivée est $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point $A(e; 1)$ est :

$$y = f'(e)(x - e) + f(e)$$

$$y = \frac{1}{e}(x - e) + \ln(e)$$

$$y = \frac{1}{e}(x - e) + 1$$

$$y = \frac{x}{e} - \frac{e}{e} + 1$$

$$y = \frac{x}{e} - 1 + 1$$

$$y = \frac{x}{e}$$

L'équation de T est donc $y = \frac{x}{e}$.

Pour $x = 0$, on obtient $y = 0$: le point $(0; 0)$, c'est-à-dire l'origine du repère, appartient donc bien à T .

La tangente T passe par l'origine du repère.

Question 2

a.

La fonction f est dérivable sur $[0,5; 10]$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout $x \in [0,5; 10]$:

$$f'(x) = 2x - 1 - \frac{3}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x}$$

On développe :

$$(x + 1)(2x - 3) = 2x^2 - 3x + 2x - 3$$

$$(x + 1)(2x - 3) = 2x^2 - x - 3$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{(x + 1)(2x - 3)}{x}$$

b.

Pour tout $x \in [0,5; 10]$,

$x > 0$ et $x + 1 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $2x - 3$.

$$2x - 3 = 0, \text{ soit } x = \frac{3}{2}.$$

Ainsi, $f'(x) < 0$ sur $[0,5; 1,5[$

$f'(1,5) = 0$, et $f'(x) > 0$ sur $]1,5; 10]$.

La fonction f admet donc un minimum sur $[0,5 ; 10]$, atteint en $x = \frac{3}{2}$, de valeur exacte :

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} - 2 - 3\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 2 - 3\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{6}{4} - \frac{8}{4} - 3\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{4} - 3\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Question 3

a.

On résout dans $\mathbb{R}$:

$$e^{-0,0434x} = 0,01$$

$$\ln(e^{-0,0434x}) = \ln(0,01)$$

$$-0,0434x = \ln(0,01)$$

$$-0,0434x = \ln(10^{-2})$$

$$-0,0434x = -2\ln(10)$$

D'où :

$$x = \frac{2\ln(10)}{0,0434}$$

b.

Le signal aura perdu 99% de sa puissance lorsque $P(x)$ vaudra 1% de $P(0)$, soit lorsque :

$$P(x) = 0,01 \times P(0)$$

$$6,75 e^{-0,0434x} = 0,01 \times 6,75$$

$$e^{-0,0434x} = 0,01$$

C'est exactement l'équation résolue à la question précédente, dont la solution exacte est

$$x = \frac{2\ln(10)}{0,0434}$$

Or

$$\frac{2\ln(10)}{0,0434} \approx 106,11$$

Arrondi au kilomètre, la distance parcourue est donc d'environ 106 km.

Question 4

$$z_A = 3 e^{-i\pi/3}$$

$$z_B = -1 + i\sqrt{3}$$

$$z_A = 3 \left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) \right)$$

$$z_A = 3 \times \frac{1}{2} + i \times 3 \times \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$z_A = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

Le point B a pour coordonnées $B(-1; \sqrt{3})$

Le point A a pour coordonnées $A(\frac{3}{2}; \frac{-3\sqrt{3}}{2})$

Les points O, A et B sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{OA}(\frac{3}{2}; \frac{-3\sqrt{3}}{2}) \quad \overrightarrow{OB}(-1; \sqrt{3})$$

On calcule le déterminant :

$$\frac{3}{2} \times \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \times (-1) = 0$$

Comme le déterminant est nul, $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires.

Les points O, A et B sont alignés

Question 5

a.

Les aires des trapèzes sous les segments $[CD]$ et $[EF]$ (de largeur 1) valent respectivement :

$$\text{Aire sous } [CD] = \frac{2+8}{2} \times 1 = 5 \quad \text{et} \quad \text{Aire sous } [EF] = \frac{3+9}{2} \times 1 = 6.$$

Comme $\mathcal{C}_f$ est au-dessus du segment $[CD]$ et en dessous du segment $[EF]$ sur $[1; 2]$, on en déduit l'encadrement d'amplitude 1 :

$$5 \leq \int_1^2 f(x) dx \leq 6.$$

b.

Une primitive de $f(x) = x + e^x - \frac{1}{x}$ sur $[1; 2]$ est $F(x) = \frac{x^2}{2} + e^x - \ln(x)$.

Donc :

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= F(2) - F(1) \\ \int_1^2 f(x) dx &= \left(\frac{4}{2} + e^2 - \ln(2)\right) - \left(\frac{1}{2} + e - \ln(1)\right) \\ \int_1^2 f(x) dx &= (2 + e^2 - \ln(2)) - \left(\frac{1}{2} + e\right) \\ \int_1^2 f(x) dx &= \frac{3}{2} + e^2 - e - \ln(2) \end{aligned}$$

Question 6

a.

On cherche à écrire $u(t) = 120\cos(70t) - 120\sin(70t)$ sous la forme $120\sqrt{2}\cos\left(70t + \frac{\pi}{4}\right)$.

D'après la formule $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, en prenant $a = 70t$ et $b = \frac{\pi}{4}$:

$$120\sqrt{2}\cos\left(70t + \frac{\pi}{4}\right) = 120\sqrt{2}\left(\cos(70t)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(70t)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$120\sqrt{2}\cos\left(70t + \frac{\pi}{4}\right) = 120\sqrt{2}\left(\cos(70t) \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin(70t) \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$120\sqrt{2}\cos\left(70t + \frac{\pi}{4}\right) = 120\left(\cos(70t) \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin(70t) \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$120\sqrt{2}\cos\left(70t + \frac{\pi}{4}\right) = 120\left(\cos(70t) \times \frac{2}{2} - \sin(70t) \times \frac{2}{2}\right)$$

$$120\sqrt{2}\cos\left(70t + \frac{\pi}{4}\right) = 120(\cos(70t) \times 1 - \sin(70t) \times 1)$$

$$120\sqrt{2}\cos\left(70t + \frac{\pi}{4}\right) = u(t)$$

On a donc bien, pour tout $t \in [0 ; +\infty[$, $u(t) = 120\sqrt{2}\cos\left(70t + \frac{\pi}{4}\right)$.

b.

$$u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$u(t) = 120\sqrt{2}\cos\left(70t + \frac{\pi}{4}\right)$$

La pulsation est $\omega = 70$, donc la fréquence est :

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$f = \frac{70}{2\pi}$$

$$f = 11 \text{ Hz}$$

Arrondie à l'unité, la fréquence délivrée par le générateur est donc $f = 11 \text{ Hz}$.