

Métropole mars 2021	
CORRECTION Nathalie Leclercq © https://www.vecteurbac.fr/	
CLASSE : Terminale STI2D	EXERCICE 3 : 4 points
VOIE : ☒ Générale	ENSEIGNEMENT : Physique-chimie
DURÉE DE L'ÉPREUVE : 0h54	CALCULATRICE AUTORISÉE : ☒ Oui sans mémoire, « type collège »

EXERCICE 3

Mathématiques Métropole mars 2021

Question 1

a.

$$f(x) = ax + b - \ln(x)$$

Le point $B(1; 1)$ appartient à $\mathcal{C}_f$, donc :

$$f(1) = a \times 1 + b - \ln(1)$$

$$f(1) = a + b - 0$$

$$f(1) = a + b$$

Or

$$f(1) = 1$$

donc :

$$a + b = 1$$

b.

La tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A (d'abscisse 0,5) est parallèle à l'axe des abscisses, donc son coefficient directeur est nul, soit :

$$f'(0,5) = 0$$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = a - \frac{1}{x}$, donc :

$$f'(0,5) = a - \frac{1}{0,5}$$

$$f'(0,5) = a - 2$$

L'égalité $f'(0,5) = 0$ donne donc :

$$a - 2 = 0$$

$$a = 2$$

c.

D'après la question a.,

$$a + b = 1$$

donc :

$$b = 1 - a$$

$$b = 1 - 2$$

$$b = -1$$

Question 2

On cherche le temps t au bout duquel $f(t) = \frac{300\,000}{2} = 150\,000$:

$$300\,000(1 - e^{-0,09t}) = 150\,000$$

$$1 - e^{-0,09t} = 0,5$$

$$-e^{-0,09t} = 0,5 - 1$$

$$-e^{-0,09t} = -0,5$$

$$e^{-0,09t} = 0,5$$

$$\ln(e^{-0,09t}) = \ln(0,5)$$

$$-0,09t = \ln(0,5)$$

$$-0,09t = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$-0,09t = -\ln(2)$$

$$t = \frac{\ln(2)}{0,09}$$

Or

$$\frac{\ln(2)}{0,09} \approx 7,70$$

Arrondi à l'unité, la machine aura donc perdu la moitié de sa valeur au bout de 8 ans.

Question 3

a.

$$f(x) = 2x - 1 - \ln(x)$$

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{x}$$

b.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $2x - 1$.

$$2x - 1 = 0$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Ainsi, $f'(x) < 0$ sur $]0; \frac{1}{2}[$,

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

et $f'(x) > 0$ sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

La fonction f admet donc un minimum en $x = \frac{1}{2}$, de valeur exacte :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

Limites aux bornes :

- en 0^+ :
 $\ln(x) \rightarrow -\infty$
donc $-\ln(x) \rightarrow +\infty$, et $2x - 1 \rightarrow -1$
donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$;
- en $+\infty$: par croissances comparées, le terme $2x$ l'emporte sur $-\ln(x)$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$ est donc :

x	0	1/2	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$\ln(2)$	$+\infty$

Question 4

a.
L'équation (E) : $y' + 0,0434y = 0$ équivaut à $y' = -0,0434y$, qui est de la forme $y' = ay$ avec $a = -0,0434$.

Les solutions sur $[0; +\infty[$ de (E) sont donc les fonctions $t \mapsto Ce^{-0,0434t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

La condition initiale $y(0) = 6,75$ donne $C = 6,75$. La solution cherchée est donc la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :
 $P(t) = 6,75 e^{-0,0434t}$.

b.

La perte de puissance après un kilomètre est :

$$P(0) - P(1) = 6,75 - 6,75 e^{-0,0434}$$

$$P(0) - P(1) = 6,75(1 - e^{-0,0434})$$

$$P(0) - P(1) = 6,75 \times 0,04246$$

$$P(0) - P(1) = 0,2866 \text{ mW}$$

$$P(0) - P(1) = 287 \mu\text{W}$$

La perte de puissance après un kilomètre est de 287 μW .

Question 5

$$f(x) = (x^2 + 5x + 4)e^x$$

$$F(x) = (x^2 + 3x + 1)e^x$$

a.

Pour tout réel x , en écrivant $F(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x^2 + 3x + 1$ et $v(x) = e^x$, on a $u'(x) = 2x + 3$ et $v'(x) = e^x$, donc :

$$\begin{aligned}
 (u(x)v(x))' &= u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \\
 F'(x) &= (2x + 3)e^x + (x^2 + 3x + 1)e^x \\
 F'(x) &= e^x[(2x + 3) + (x^2 + 3x + 1)] \\
 F'(x) &= e^x(x^2 + 5x + 4) \\
 F'(x) &= f(x).
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x , $F'(x) = f(x)$.

b.

Comme F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$:

$$\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0)$$

$$F(1) = (1^2 + 3 \times 1 + 1)e^1 = 5e$$

$$F(0) = (0^2 + 3 \times 0 + 1)e^0 = 1$$

Donc :

$$\int_0^1 f(x) dx = 5e - 1$$

Question 6

a.

On cherche à écrire $u(t) = 240\cos(50t) - 240\sin(50t)$ sous la forme $240\sqrt{2}\cos\left(50t + \frac{\pi}{4}\right)$.

D'après la formule $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, en prenant $a = 50t$ et $b = \frac{\pi}{4}$:

$$120\sqrt{2}\cos\left(50t + \frac{\pi}{4}\right) = 120\sqrt{2}\left(\cos(50t)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(50t)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$240\sqrt{2}\cos\left(50t + \frac{\pi}{4}\right) = 240\sqrt{2}\left(\cos(50t) \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin(50t) \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$240\sqrt{2}\cos\left(50t + \frac{\pi}{4}\right) = 240\left(\cos(50t) \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin(50t) \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$240\sqrt{2}\cos\left(50t + \frac{\pi}{4}\right) = 240\left(\cos(50t) \times \frac{2}{2} - \sin(50t) \times \frac{2}{2}\right)$$

$$240\sqrt{2}\cos\left(50t + \frac{\pi}{4}\right) = 240(\cos(50t) - \sin(50t))$$

$$240\sqrt{2}\cos\left(50t + \frac{\pi}{4}\right) = u(t)$$

On a donc bien, pour tout $t \in [0; +\infty[$, $u(t) = 240\sqrt{2}\cos\left(50t + \frac{\pi}{4}\right)$.

b.

$$u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$u(t) = 120\sqrt{2}\cos\left(50t + \frac{\pi}{4}\right)$$

La pulsation est $\omega = 50$, donc la fréquence est :

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$f = \frac{50}{2\pi}$$

$$f = 7,96 \text{ Hz}$$

Arrondie à l'unité, la fréquence délivrée par le générateur est donc $f = 8 \text{ Hz}$.