

Métropole septembre 2021	
CORRECTION Nathalie Leclercq © https://www.vecteurbac.fr/	
CLASSE : Terminale STI2D	EXERCICE 3 : 4 points
VOIE : ☑ Générale	ENSEIGNEMENT : Physique-chimie
DURÉE DE L'ÉPREUVE : 0h54	CALCULATRICE AUTORISÉE : ☑ Oui sans mémoire, « type collège »

EXERCICE 3

Mathématiques Métropole septembre 2021

Question 1

$$f(x) = x^2 e^x$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

En écrivant $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^x$, on a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = e^x$, donc pour tout réel x :

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x$$

$$f'(x) = e^x(2x + x^2)$$

$$f'(x) = e^x x(x + 2)$$

Pour tout réel x , $e^x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x + 2)$, qui s'annule en $x = -2$ et $x = 0$, et qui est négatif entre ces deux racines.

La fonction f n'est donc pas croissante sur tout $\mathbb{R}$ (elle décroît notamment sur $] -2 ; 0[$).

L'affirmation 1 est FAUSSE.

Question 2

Le point $M(x ; y)$ appartient à $\mathcal{C}_h$, donc $y = h(x) = \ln(2x + 1)$.

L'unité graphique étant 1 cm, la condition $y > 15$ cm signifie

$$h(x) > 15$$

$$\ln(2x + 1) > 15$$

La fonction exponentielle étant strictement croissante :

$$e^{\ln(2x+1)} > e^{15}$$

$$2x + 1 > e^{15}$$

$$2x > e^{15} - 1$$

$$x > \frac{e^{15} - 1}{2}$$

$$x > 1\,634\,508 \text{ cm}$$

$$\text{Or } 1\,634\,508 \text{ cm} = 16\,345,08 \text{ m} = 16,35 \text{ km.}$$

Comme $16,35 > 16$, l'abscisse x du point M se situe donc bien à plus de 16 km du point O.

L'affirmation 2 est VRAIE.

Question 3

On cherche le temps t au bout duquel $N(t) = \frac{N(0)}{2}$:

$$N(0)e^{-0,027t} = \frac{N(0)}{2}$$

$$e^{-0,027t} = \frac{1}{2}$$

$$\ln(e^{-0,027t}) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$-0,027t = -\ln(2)$$

$$t = \frac{\ln(2)}{0,027}$$

$$t = 25,67 \text{ heures, ce qui est différent de 11 heures. L'affirmation 3 est FAUSSE}$$

Question 4

Pour tout réel t :

$$f(t) = \cos(t) + 2\sin(t)$$

$$f'(t) = -\sin(t) + 2\cos(t)$$

$$f''(t) = -\cos(t) - 2\sin(t)$$

$$f''(t) = -(\cos(t) + 2\sin(t))$$

$$f''(t) = -f(t)$$

Donc, pour tout réel t :

$$f''(t) + f(t) = -f(t) + f(t) = 0$$

La fonction f est donc bien solution de l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$

De plus :

$$f(0) = \cos(0) + 2\sin(0) = 1 + 0 = 1$$

$$f'(0) = -\sin(0) + 2\cos(0) = 0 + 2 = 2$$

Les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ sont vérifiées.

L'affirmation 4 est VRAIE.

Question 5

On met z sous forme algébrique en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$z = \frac{2-i}{1-3i} \cdot \frac{(2-i)(1+3i)}{(2-i)(1+3i)}$$

$$z = \frac{(2-i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}$$

$$z = \frac{2+6i-i-3i^2}{1^2+3^2}$$

$$z = \frac{2+5i+3}{1+9}$$

$$z = \frac{5+5i}{10}$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

On va mettre z sous la forme exponentielle :

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 e^{i\frac{\pi}{4} \times 4} = \frac{1}{4} e^{i\pi} = \frac{1}{4} \times (\cos(\pi) + i \sin(\pi)) = \frac{1}{4} \times (-1 + 0) = -\frac{1}{4}$$

L'affirmation 5 est VRAIE.

Question 6

On calcule les longueurs des trois côtés du triangle ABC à l'aide des affixes des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}: z_B - z_A = (4 + 2i) - (-1 + i) = 5 + i, \quad \text{donc } AB^2 = 5^2 + 1^2 = 26 \text{ d'ou } AB = \sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{AC}: z_C - z_A = -4i - (-1 + i) = 1 - 5i, \quad \text{donc } AC^2 = 1^2 + (-5)^2 = 26 \text{ d'ou } AC = \sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{BC}: z_C - z_B = -4i - (4 + 2i) = -4 - 6i, \text{ donc } BC^2 = (-4)^2 + (-6)^2 = 16 + 36 = 52$$

d'ou $AB = \sqrt{52}$

On remarque que $AB = AC$: le triangle ABC est donc isocèle en A.

De plus, $AB^2 + AC^2 = 26 + 26 = 52 = BC^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est donc rectangle en A.

L'affirmation 6 est VRAIE