CLASSE : Terminale STI2D	**EXERCICE 3** : 4 points
VOIE : ☒ Générale	**ENSEIGNEMENT : Physique-chimie**
DURÉE DE L'ÉPREUVE : 0h54	**CALCULATRICE AUTORISÉE :** ☒Oui sans mémoire, « type collège »

EXERCICE 3

Mathématiques Métropole Septembre 2022

Question 1

1.

$\ln(35) = \ln(5 \times 7) = \ln(5) + \ln(7)$

La réponse exacte est donc la réponse **b**.

2.

$e^{20} = e^{5+15} = e^5 \times e^{15}$

La réponse exacte est donc la réponse **d**.

Question 2

$f(x) = 28\ln(x+1) + 70$

1.

Au départ de la course, $x = 0$:

$f(0) = 28\ln(0+1) + 70$

$f(0) = 28\ln(1) + 70$

$f(0) = 28 \times 0 + 70$

$f(0) = 70$

Au départ de la course, la fréquence cardiaque du coureur au départ de la course est donc de 70 battements par minute.

2.

On résout $f(x) = 185$ sur $[0\,;\,100]$:

$28\ln(x+1) + 70 = 185$

$28\ln(x+1) = 185 - 70$

$28\ln(x+1) = 115$

$\ln(x+1) = \dfrac{115}{28}$

$e^{\ln(x+1)} = e^{\frac{115}{28}}$

$x + 1 = e^{\frac{115}{28}}$

$x = e^{\frac{115}{28}} - 1$

$x = 60\ m$

Arrondi à l'unité, selon ce modèle, la fréquence cardiaque du sportif est égale à 185 battements par minute au bout d'environ 60 mètres.

Question 3

1.

L'équation $(E) : y' = -0{,}2y + 44$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0{,}2$ et $b = 44$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $f(t) = Ce^{at} - \dfrac{b}{a}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

$f(t) = Ce^{-0{,}2\,t} - \dfrac{44}{-0{,}2}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

$f(t) = Ce^{-0{,}2t} + 220, \quad C \in \mathbb{R}$.

2.

La condition $f(0) = 25$ donne :

$Ce^0 + 220 = 25$

$C + 220 = 25$

$C = -195$

L'expression de $f(t)$, pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$, est donc :

$f(t) = -195e^{-0,2t} + 220$

Question 4

1.

Le module de z est :

$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2.$

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$,

soit $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$

La forme exponentielle de z est donc :

$z = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

2.

On remarque que $-\sqrt{2} = \sqrt{2}\,e^{i\pi}$, donc :

$z' = -\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}.$

On en déduit :

$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{-\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}$

$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{-2}{\sqrt{2}}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}$

$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{-2\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}$

$\dfrac{z}{z'} = -\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}$

$\dfrac{z}{z'} = -\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{2\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}\right)}$

$\dfrac{z}{z'} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{12}}$

Question 5

On cherche le temps t au bout duquel $N(t) = \frac{N(0)}{2}$:

$N(0)e^{-0,086t} = \dfrac{N(0)}{2}$

$e^{-0,086t} = \dfrac{1}{2}$

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, cette égalité équivaut à :

$\ln(e^{-0,086t}) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$-0{,}086t = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
$-0{,}086t = -\ln(2)$
$t = \frac{\ln(2)}{0{,}086}$
$t = 8$ jours
Arrondi à l'unité, la demi-vie de l'iode 131 est de 8 jours.

Question 6
$f(x) = \sin(x) + \cos(x)$
1.
Pour tout réel x :
$f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$
$f''(x) = -\sin(x) - \cos(x)$
$f''(x) = -\big(\sin(x) + \cos(x)\big) = -f(x)$

Donc, pour tout réel x :
$f''(x) + f(x) = -f(x) + f(x) = 0$
La fonction f est donc bien solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$

2.
D'après la formule $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$, en prenant $a = x$ et $b = \frac{\pi}{4}$:
$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos(x) \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(x) \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$
$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{2}\big(\cos(x) + \sin(x)\big)$
$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x) + \sin(x)$
$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$

On a donc bien, pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.