

CLASSE : Terminale STI2D

EXERCICE 3 : 4 points

VOIE : ☒ Générale

ENSEIGNEMENT : Physique-chimie

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 0h54

CALCULATRICE AUTORISÉE : ☒ Oui sans mémoire, « type collège »

EXERCICE 3

Mathématiques Métropole septembre 2025

Q1.

$$f(x) = e^{-0,016x} - 2$$

$f(x)$ est de la forme e^u avec :

$$u(x) = -0,016x$$

$$u'(x) = -0,016$$

$$(e^u)' = u'(x) \times e^u$$

$$f'(x) = -0,016 e^{-0,016x}$$

Pour tout réel x , $e^{-0,016x} > 0$, donc $f'(x) = -0,016 e^{-0,016x} < 0$: la fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

La réponse exacte est donc la réponse D.

Q2.

$$f(x) = \frac{30}{1+2x}$$

La valeur moyenne de f sur $[5 ; 15]$ est :

$$m = \frac{1}{15-5} \int_5^{15} f(x) dx = \frac{1}{10} \int_5^{15} \frac{30}{1+2x} dx.$$

$f(x)$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec :

$$u(x) = 1 + 2x$$

$$u'(x) = 2$$

$$\frac{30}{1+2x} = 15 \times \frac{2}{1+2x}$$

Une primitive de f est donc $F(x) = 15\ln(1+2x)$, et :

$$m = \frac{1}{15-5} \int_5^{15} \frac{30}{1+2x} dx = [15\ln(1+2x)]_5^{15}$$

$$m = \frac{1}{10} \times (15\ln(1+2 \times 15) - 15\ln(1+2 \times 5))$$

$$m = \frac{1}{10} \times (15\ln(31) - 15\ln(11))$$

$$m = \frac{1}{10} \times 15\ln\left(\frac{31}{11}\right)$$

$$m = 1,55$$

Comme $1,55 < 3$, il est faux que la valeur moyenne de f sur $[5 ; 15]$ soit supérieure à 3.

Q3.

L'équation différentielle $y' = -0,08y + 1,84$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,08$ et $b = 1,84$.

Les solutions de l'équation sont de la forme :

$$f(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$f(t) = Ce^{-0,08t} - \frac{1,84}{-0,08}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$f(t) = Ce^{-0,08t} + 23, \quad C \in \mathbb{R}$$

La condition initiale $f(0) = 83$ donne :

$$Ce^0 + 23 = 83$$

$$C + 23 = 83$$

$$C = 60$$

L'unique solution cherchée est donc la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(t) = 60e^{-0,08t} + 23.$$

Q4.

On résout dans $[0; +\infty[$ l'inéquation $f(t) \leq 44$:

$$60e^{-0,08t} + 23 \leq 44$$

$$60e^{-0,08t} \leq 21$$

$$e^{-0,08t} \leq \frac{21}{60}$$

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$, cette inégalité équivaut à :

$$\ln(e^{-0,08t}) \leq \ln\left(\frac{21}{60}\right)$$

$$-0,08t \leq \ln\left(\frac{21}{60}\right)$$

En divisant par $-0,08$ (ce qui inverse le sens de l'inégalité) :

$$t \geq \frac{\ln\left(\frac{21}{60}\right)}{-0,08}$$

$$t \geq 13$$

La température du café est donc inférieure ou égale à 44°C au bout de 13 minutes après sa sortie de la machine.